درس برنامه‌ریزی غیرخطی روز چارشنبه ۹۰،۱۲،۳ - جلسه اول (غایب)

فصل ۱ - بهینه‌سازی نامقید

توابع تک متغیره

قضیه تیلور: اگر $f(x)$ ، $f'(x)$, $f''(x)$ در $[a,b]$ تعریف شده باشند و x^* ، x دو نقطه متمایز در $[a,b]$ باشند آنگاه عددی مانند $z \in (a,b)$ وجود دارد بطوریکه:

$$\underbrace{f(x)}_{\text{بسط تیلور در نقطه } x^*} = f(x^*) + (x-x^*)f'(x^*) + \frac{f''(z)(x-x^*)^2}{2!}$$

اگر $f(x)$ و مشتقات آن در $x=0$ تعریف شده باشند $x^*=0$ ← بسط مک لورن

اگر $f'(x^*)=0$ آنگاه:

الف) اگر برای هر x ، $f''(x)>0$ باشد آنگاه $f(x)=f(x^*)+0+$ عدد مثبت

$\rightarrow f(x) > f(x^*) \rightarrow$ بنابراین x^* نقطه Min بازه $[a,b]$

ب) اگر برای هر x ، $f''(x)<0$ باشد آنگاه $f(x)=f(x^*)+0+$ عدد منفی

$\rightarrow f(x) < f(x^*) \rightarrow$ بنابراین x^* نقطه Max بازه $[a,b]$

مثال:

$$f(x) = e^{x^2}$$

$$f'(x) = 2xe^{x^2}$$

$$f''(x) = (2+4x^2)e^{x^2}$$

$f'(0)=0 \ , \ \forall x \in R \rightarrow f''(x)>0 \rightarrow x=0$ Min نسبی است

تعریف : فرض کنید تابع $f(x)$ یک تابع حقیقی در بازه I (بازه ممکن است متناهی، نامتناهی، باز، بسته، نیم باز، نیم بسته باشد) نقطه‌ای مانند x^* در بازه I

الف) یک Min کننده سراسری (مطلق) $f(x)$ روی بازه I می‌گوییم هرگاه $\forall x\in I \rightarrow f(x) \geq f(x^*)$

ب) یک Min کننده اکید $f(x)$ روی بازه I می‌گوییم هرگاه $\forall x\in I \rightarrow f(x) > f(x^*)$

پ) یک Min کننده موضعی (نسبی) $f(x)$ روی بازه I می‌گوییم هرگاه یک عدد مثبت مانند δ وجود داشته باشد بطوریکه برای هر x در فاصله $x^*-\delta < x < x^*+\delta$ داشته باشیم $f(x^*) \leq f(x)$

ت) یک Min کننده موضعی اکید $f(x)$ روی بازه I می‌گوییم هرگاه عدد مثبت مانند δ وجود داشته باشد بطوریکه برای هر x در فاصله $x^*-\delta < x < \delta+x^*$ داشته باشیم $f(x^*) < f(x)$

تذکر : با تغییرات مناسب می‌توان تعاریف بالا را برای Max کننده سراسری، Max کننده سراسری اکید، Max کننده موضعی و Max کننده اکید اصلاح کرد.

البته توجه شود Max کننده های $f(x)$ همان Min کننده های $(-f(x))$ هستند.

$$-\mathrm{Max}\left(-f(x)\right) = \mathrm{Min}\ f(x)$$

تعریف : نقطه x^* را بحرانی $f(x)$ در I می‌گوییم هرگاه $f'(x^*)$ موجود و برابر با صفر باشد.

درس برنامه‌ریزی غیرخطی روز چهارشنبه ۱۰/۱۲/۹۰ - جلسه دوم

نقاط بحرانی

مشتق در آنجا صفر باشد

مشتق دوم صفر ← ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی

مینیمم سراسری اگر یکتا بود اکید خواهد بود

مشتق اول نشان دهنده صعودی یا نزولی بودن تابع

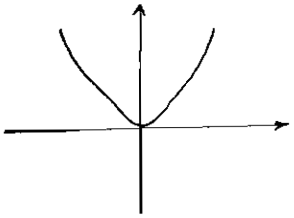
مشتق دوم نشان دهنده تقعر یا تحدب تابع

مثال $f_{(x)} = x^2$

$$f'_{(x)} = 2x = 0 \longrightarrow x = 0$$

$f''_{(x)} = 2 > 0 \longrightarrow$ $x=0$ مینیمم موضعی

مشتق دوم مثبت



نتیجه از قضیه قبل ص ۳

فرض کنید $f_{(x)}$ ، $f'_{(x)}$ و $f''_{(x)}$ در بازه I (چه بسته، چه باز) پیوسته باشند همچنین فرض کنید $x^* \in I$ یک نقطه بحرانی f باشد آنگاه:

الف) اگر $f''_{(x)} \geqslant 0$ برای هر x متعلق به I در اینصورت x^* یک مینیمم کننده سراسری $f_{(x)}$ روی I است.

ب) اگر $f''_{(x)} > 0$ (مطلقا مثبت) به ازای هر x متعلق به I به طوریکه $x \neq x^*$ در اینصورت x^* یک مینیمم کننده سراسری اکید $f_{(x)}$ سر I است.

ج) اگر $f''_{(x^*)} > 0$ باشد آنگاه x^* مینیمم کننده موضعی می باشد (نه سراسری)

توجه: هر چی برای مینیمم می‌گوییم برای ماکزیمم هم است.

توابع چند متغیره ص ۵

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ یک بردار که n مولفه دارد

x بردار $= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\qquad$ y بردار $= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

تمام بردارها هر بعدی باشند با جمع و ضرب اسکالر یک فضای برداری تشکیل می دهد که خواص جمع، ضرب، قرینه، صفر بودن و ... را دارد.

$x + y = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$ جمع برداری

$x - y = \begin{pmatrix} x_1-y_1 \\ x_2-y_2 \\ \vdots \\ x_n-y_n \end{pmatrix}$ تفریق برداری

$\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$, $\lambda \in R$ ضرب اسکالر (عددی)

ضرب نقطه‌ای (داخلی) در بردار

$$x\cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

از یک نقطه برای آن عمل، استفاده می‌شود به خاطر آن نقطه‌ای گفته می‌شود.

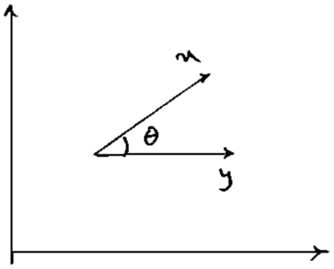
اندازه بردار

$$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

نُرم بردار (فاصله از مبداء)

نرم یا فاصله اقلیدسی ص ۷

$$d(x,y) = \left[(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_i-x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$



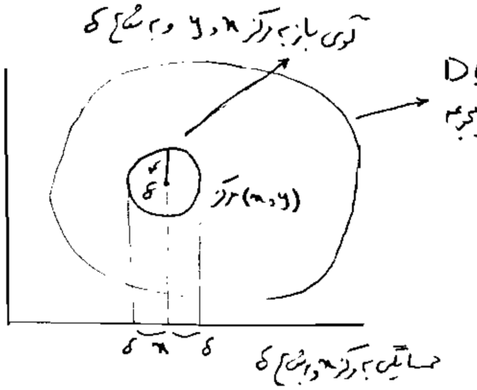
$$\cos\theta = \frac{x\cdot y}{\underbrace{\|x\|\,\|y\|}_{\text{اندازه بردارها}}}$$

$$-1\leqslant\cos\theta\leqslant 1 \longrightarrow -1\leqslant \frac{x\cdot y}{\|x\|\,\|y\|}\leqslant 1 \longrightarrow$$

$$-\|x\|\,\|y\| \leqslant x\cdot y \leqslant \|x\|\,\|y\| \xrightarrow{①} |x y| \leqslant \|x\|\,\|y\|$$

① ⟶ اگر : می‌دانیم $-2\leqslant a\leqslant 2 \longrightarrow |a|\leqslant 2$

نامساوی کُشی شوارتز ص ۸



$D\subseteq R^n$
زیرمجموعه

⟶ کشف همسایگی به سه بُعدی قابل تفهیم است.

گوی باز $B(x,\delta) = \{Z\in R^n \mid \|z-x\|<\delta\}$ بیشتر با گوی باز کار داریم

بردار n تایی

گوی بسته اگر مساوی باشد (روی دایره می‌افتند)

نقاط درونی یک نقطه را نقطه درونی مجموعه‌ای مانند D می‌نامند هرگاه گوی بازی به مرکز این نقطه و با شعاع r (r>0) وجود داشته باشد به طوریکه گوی باز مشمول در D باشد. (یعنی در D قرار گیرد)

مجموعه باز خودش با درون خودش برابر نباشد $[2,5] \longrightarrow (2,5)$ مجموعه درونی به غیر از 2 و 5

مجموعه بسته درونش با خودش برابر باشد $(2,5) \longrightarrow (2,5)$

کراندار $x\in D : \|x\|<M \;,\; M>0 \quad D\subseteq R^n$

کراندار و بسته مجموعه فشرده یا هم بند نیز گویند.

تابع حقیقی

اگر تابع خروجی اش یکی باشد تابع حقیقی گویند. (بدون توجه به ورودی)

تابع برداری

اگر تابع خروجی اش بیش از یکی باشد.

تعریف

فرض کنید $f(x)$ یک تابع حقیقی باشد که بر زیرمجموعه $D \subseteq R^n$ تعریف شده باشد یک نقطه x^* متعلق به D ($x^* \in D$) را :

الف) می‌نیمم کننده سراسری برای $f(x)$ روی D می‌نامند هرگاه برای هر $x \in D$ ، $f(x^*) \leq f(x)$ باشد.

ب) می‌نیمم کننده سراسری اکید برای $f(x)$ روی D می‌نامند هرگاه برای هر $x \in D$ ، که $x \neq x^*$ ، $f(x^*) < f(x)$ باشد.

ج) می‌نیمم کننده موضعی برای $f(x)$ است هرگاه عدد مثبتی مانند δ وجود داشته باشد بطوریکه $f(x^*) \leq f(x)$
برای هر $x \in B(x^*, \delta)$ (گوی باز به مرکز x^* و به شعاع δ)

د) می‌نیمم کننده موضعی اکید برای $f(x)$ است هرگاه عدد مثبتی مانند δ وجود داشته باشد بطوریکه $f(x^*) < f(x)$
برای هر $x \in B(x^*, \delta)$ که $x \neq x^*$ است.

ه) نقطه بحرانی برای $f(x)$ می‌نامند هرگاه مشتقهای نسبی مرتبه اول $f(x)$ در x^* وجود داشته باشند و همه مشتقها در x^* صفر شوند.

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

توجه : به طور مشابه می‌توان تعاریف فوق را به نقاط ماکزیمم سراسری، ماکزیمم سراسری اکید، ماکزیمم موضعی، ماکزیمم موضعی اکید با تغییر جهت نامساوی به صورت $f(x^*) \geq f(x)$ یا $f(x^*) > f(x)$ تغییر داد.

بسط تیلور ص ۱۰

$$f_{(x)} = f_{(x^*)} + (x-x^*)\, f'_{(x^*)} + \frac{f''(z)}{2!}(x-x^*)^2$$

$$f'_{(x^*)} = 0 \xrightarrow{x^* \text{ بحرانی (نقطه بحرانی)}} \left[\begin{array}{l} f''(z) > 0 \to f_{(x^*)} < f_{(x)} \to x^* \text{ می‌نیمم موضعی} \\ f''(z) < 0 \to f_{(x^*)} > f_{(x)} \to x^* \text{ ماکزیمم موضعی} \end{array}\right.$$

فرمول تیلور برای یک تابع دو متغیره ص ۱۲

$$y = f_{(x)} \quad , \quad x \in D \subseteq R^n$$

$$f_{(x)} = f_{(x^*)} + \underbrace{\nabla f \cdot}_{\text{حاصلضرب نقطه‌ای (بردار)}} (x-x^*) + \frac{1}{2}(x-x^*)^t \cdot \underbrace{H(f_{(z)})}_{\text{هسیان تابع}} \cdot (x-x^*)$$

گرادیان F ص ۱۲

بردار گرادیان. $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \times \frac{\partial f}{\partial x_2} \times \dots \times \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$

هسیان تابع چند متغیره ص ۱۲

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \longrightarrow \text{مشتقات مرتبه دوم را نشان می‌دهد}$$

تابع سه متغیره

$$f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2 + 4y_3^2 - 2y_1 y_2 + 4y_2 y_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = 2y_1 - 2y_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_2} = -2y_2 - 2y_1 + 4y_3 \longrightarrow \nabla f = (2y_1 - 2y_2 \,,\, -2y_2 - 2y_1 + 4y_3 \,,\, 8y_3 + 4y_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_3} = 8y_3 + 4y_2$$

$(y_1, y_2, y_3) = (1, 1, 1)$ نقطه انتخابی

مشتق

$$\text{هسیان } H = \left[\begin{array}{ccc} \text{نسبت به } y_1 & \text{نسبت به } y_2 & \text{نسبت } y_3 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{array}\right]$$

همیشه یک ماتریس متقارن است

چون $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$

درس برنامه‌ریزی غیرخطی روز چهارشنبه ۹۰,۱۰,۱۷ - جلسه سوم

نقطه بحرانی قضیه ۵,۲,۱ ص ۱۴

گرادیان در آن نقطه صفر باشد

$\nabla f(x^*) = 0$

$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$

ترانهاده = ضرب برداری

$x^T y$ ضرب برداری

$x \cdot y$ ضرب نقطه‌ای $= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \longrightarrow x \cdot y = x^T y$

$x \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad y \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

مثال فرم درجه دوم متناظر با A ص ۱۴

$$y \cdot A \cdot y' = Q_A(y) = (y_1 \ y_2 \ y_3) \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & ۲ \\ 0 & ۲ & ۴ \end{bmatrix} \qquad \underset{1\times 3}{(y_1 \ y_2 \ y_3)} \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 2y_1 - y_2 + 2y_3 \\ -y_1 + 3y_2 \\ 2y_1 + 5y_3 \end{pmatrix}} =$$

$$= 2y_1^2 - y_1 y_2 + 2y_1 y_2 - y_1 y_2 + 3y_2^2 + 2y_1 y_3 + 3y_3^2$$

$\forall \ y \in R^n$

$Q_A(y) = y^T A y$ ص ۱۵

$> 0 \rightarrow$ معین مثبت

$\geq 0 \rightarrow$ نیمه معین مثبت

$< 0 \rightarrow$ معین منفی

$\leq 0 \rightarrow$ نیمه معین منفی

اگر به ازای برخی مقادیر y ها مثبت و برای برخی مقادیر y ها منفی بود نامعین گویند.

$A = \begin{bmatrix} 1 & ۴ \\ ۴ & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$ ماتریس معین مثبت $= ?$ ص ۱۶

$y = (y_1, y_2)$

$y^T A y = (y_1, y_2) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$= (y_1, y_2) \begin{pmatrix} y_1 + 4y_2 \\ 4y_1 + y_2 \end{pmatrix} = y_1^2 + 4y_1 y_2 + 4y_1 y_2 + y_2^2 = y_1^2 + 8y_1 y_2 + y_2^2$

$\begin{bmatrix} y_1 = 1 \\ y_2 = -1 \end{bmatrix} \longrightarrow = -۶ < 0 \longrightarrow$ با اینکه درایه‌های ماتریس مثبت‌اند ماتریس معین مثبت نیست

هسیان ماتریس متقارن است . یعنی $a_{12} = a_{21}$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

ص ۱۷

ماتریس $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ معین مثبت است اگر $\lambda_i > 0$ $(i=1,2,3)$

ماتریس $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ نیمه معین مثبت است اگر $\lambda_i \geqslant 0$

ماتریس $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ معین منفی است اگر $\lambda_i < 0$

ماتریس $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ نیمه معین منفی است اگر $\lambda_i \leqslant 0$

قضیه
ص ۱۹

ماتریس معین مثبت $\longrightarrow$ $\det \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right| > 0 \; , \; a_{11} > 0$ اگر det دترمینان , در ماتریس هسیان

ماتریس معین منفی $\longrightarrow$ $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0 \; , \; a_{11} < 0$ اگر

باید در نظر داشت فقط برای ماتریس متقارن این حالت وجود دارد .

تعمیم به حالت کلی ص ۲۰

اگر همه مینورها مثبت و آخری صفر باشد نیمه معین مثبت $\Delta_1 , \Delta_2 , \dots , \Delta_{n-1} > 0 , \Delta_n = 0$

اگر همه مینورها یک در میان مثبت منفی و آخری صفر باشد نیمه معین منفی $\Delta_n = 0 , (-1)^K \Delta_K > 0 \; (K=1,2,\dots,n-1)$ یعنی

$\Delta_1 < 0$
$\Delta_2 > 0$
$\Delta_3 < 0$
$\Delta_4 > 0$
$\downarrow$
Δ_{n-1}
$\Delta_n = 0$

در حالت فوق اگر دو تای آخر نیست برعکس شرط برقرار نیست .

برای حالتهای معین مثبت و یا معین منفی برعکس شرط برقرار است .

مثال صـ ۲۳ (۵.۳.۱)

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + x_2x_3 - x_1x_3$$

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) = (2x_1 - x_2 - x_3, 2x_2 - x_1 + x_3, 2x_3 + x_2 - x_1)$$

هرگاه $\underline{Ax=0}$ و $|A| \neq 0$ وارون A یعنی A^{-1} وجود دارد

$\underbrace{A^{-1}A}x = A^{-1}0$ دستگاه همگن (سمت راست صفر)

$Ix = 0$ ماتریس ضرایب وارون داشته باشد

$x = 0$ همه جوابها صفر هستند.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_3 + x_2 - x_1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{matrix}$$

ماتریس ضرایب همان ماتریس هسیان است

$8(2\times2\times2)$

$1(-1\times1\times-1)$

$1(-1\times-1\times1)$

$(-1\times2\times-1)2$

$(1\times1\times2)2$

$(2\times-1\times-1)2$

$$\begin{cases} \Delta_1 = 2 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1 = 3 > 0 \\ \Delta_3 = 4 > 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ $HF(x)$ روی R^n معین مثبت $\longrightarrow$ $F(x)$ تک مینیمم کننده سراسری اکید $x^*(0,0,0)$

مثال ج صـ ۲۵

$$f(x,y) = e^{x-y} + e^{y-x}$$

$\ln e = 1$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x-y} - e^{y-x} \\ -e^{x-y} + e^{y-x} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} e^{x-y} - e^{y-x} = 0 \\ -e^{x-y} + e^{y-x} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{از معادله اول}} e^{x-y} = e^{y-x} \longrightarrow$$

طرفین ln می‌گیریم $x - y = y - x \to 2x = 2y \to x = y$

این نشان می‌دهد که تمام نقاط روی خط $y=x$

تک مینیمم کننده سراسری برای تابع $F(x,y)$ می‌باشد

$$HF(x,y) = \begin{bmatrix} e^{x-y} + e^{y-x} & -e^{x-y} - e^{y-x} \\ -e^{x-y} + e^{y-x} & e^{x-y} + e^{y-x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = e^{x-y} + e^{y-x} > 0 \\ \Delta_2 = (e^{x-y} + e^{y-x})(e^{x-y} + e^{y-x}) - (-e^{x-y} - e^{y-x})(-e^{x-y} - e^{y-x}) = 0 \end{cases}$$

نیمه معین مثبت ← مینیمم کننده غیر اکید (سراسری)

درس برنامه‌ریزی غیرخطی روز چهارشنبه ۹۱/۱/۲۳ - جلسه چهارم

مثال ت ص ۲۶

$$f(x,y) = e^{x-y} + e^{x+y}$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} = e^{x-y} + e^{x+y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -e^{x-y} + e^{x+y} \end{bmatrix}$$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} e^{x-y} + e^{x+y} & -e^{x-y} + e^{x+y} \\ -e^{x-y} + e^{x+y} & e^{x-y} + e^{x+y} \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 > 0 \quad , \quad \Delta_2 > 0 \longrightarrow$ معین مثبت

$\nabla f(x,y) = 0 \longrightarrow \begin{matrix} e^{x-y} + e^{x+y} = 0 \\ -e^{x-y} + e^{x+y} = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a+b=0 \\ -a+b=0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} a=-b \\ a=b \end{matrix} \longrightarrow$ امکان ندارد

$f(x,y)$ هیچ نقطه بحرانی و هیچ نقطه مینیمم کننده سراسری ندارد.

قضیه ۱.۳.۶ ص ۲۶

قضیه ۱.۳.۷ ص ۲۸

مثال ۱.۳.۸ ص ۲۸

$$f(x_1,x_2) = x_1^3 - 12x_1x_2 + 8x_2^3$$

$$\begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 - 12x_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = -12x_1 + 24x_2^2 \end{matrix} \xrightarrow[\text{دستگاه را حل می‌کنیم}]{\text{قرار داده} = 0} \begin{matrix} 3x_1^2 - 12x_2 = 0 \\ -12x_1 + 24x_2^2 = 0 \end{matrix}$$

از معادله اول $\longrightarrow 3x_1^2 = 12x_2 \longrightarrow x_2 = \frac{1}{4}x_1^2$

در معادله 2 قرار $\longrightarrow -12x_1 + 24(\frac{1}{4}x_1^2)^2 = 0 \longrightarrow -12x_1 + \frac{3}{2}x_1^4 = 0$

$x_1(-12 + \frac{3}{2}x_1^3) = 0 \longrightarrow -12 + \frac{3}{2}x_1^3 = 0 \longrightarrow x_1^3 = 8 \longrightarrow x_1 = 2$

$x_1 = 2 \longrightarrow x_2 = 1 \longrightarrow (2,1)$

$x_1 = 0 \longrightarrow x_2 = 0 \longrightarrow (0,0)$

$Hf(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 6x_1 & -12 \\ -12 & 48x_2 \end{bmatrix} \longrightarrow Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$ هسیان نامعین است

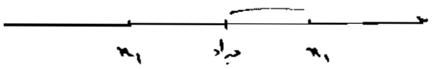
لذا نقطه (۰,۰) نقطه زین است

$$HF(2,1) = \begin{bmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{bmatrix} \rightarrow$$ هر دو مینور مثبت → هسین مثبت

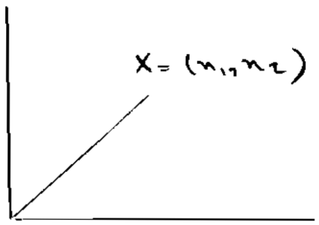
$\Delta_1 = 12$

$\Delta_2 = \det(H) = 12(48) - (-12)(-12) = 432$

توابع قهری یا مجانبی ص ۴۰



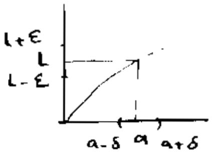
$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$



$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) \rightarrow \infty$$

نرم = فاصله x از مبدا

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$



$|x-a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

قهری بودن یعنی اگر نرم x $\|x\|$ یا به عبارتی فاصله x از مبداء از مقدار مثبت مانند R_M بزرگتر باشد آنگاه $|f(x)|$ (اندازه) از هر عدد بزرگی مانند M بیشتر شود که R_M به M بستگی دارد.

$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \longrightarrow \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$

$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ تابع باشد $\rightarrow \; = \|x\|^2$

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x_1, x_2) = \lim_{\|x\| \to \infty} \|x\|^2 = \infty$$

مثال ص ۴۱

$f(x,y) = x^4 + y^4 - 3xy$

$= (x^4 + y^4)\left(1 - \frac{3xy}{x^4 + y^4}\right) \leftarrow$ از x^4+y^4 فاکتور بگیریم

وقتی $\|x,y\| \to \infty \Rightarrow x^4$ یا $y^4 \to \infty \Rightarrow$ مخرج سریعتر از صورت رشد → کسر $= 0$

$\rightarrow f(x,y)$ مطابق افزایش x, y، به سمت بی‌نهایت

$$\lim_{\|x,y\| \to \infty} f(x,y) = \lim (x^4 + y^4)(1 - 0) = \infty \rightarrow f(x,y)$$ پس تابع قهری است

درس برنامه‌ریزی غیرخطی روز چهارشنبه ۳۰,۱,۹۱ - جلسه پنجم

مثال ج ص ۴۱

$f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$

$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x,y) \to \infty$

$\lim_{\|y\| \to \infty} f(x,y) \to \infty$

$\leftarrow$ با ثابت گرفتن x یا y
هر دو به سمت ∞

f(x,y) در جهت به ∞ نمی‌رود $\rightarrow$
پس یک تابع قهری نیست

قضیه ۴.۴.۱ ص ۴۲

مثال ۵.۴.۱ ص ۴۴

$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy \rightarrow$ تابع قهری = ?

$= (x^4+y^4)\left(1 - \frac{4xy}{x^4+y^4}\right)$

تابع قهری است

طبق قضیه حداقل یک مینیمم کننده سراسری دارد

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y = 0 \rightarrow x^3 = y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -4x + 4y^3 = 0 \rightarrow y^3 = x \rightarrow (x^3)^3 = x \rightarrow x^9 - x = 0 \rightarrow x(x^8 - 1) = 0 \end{cases}$$

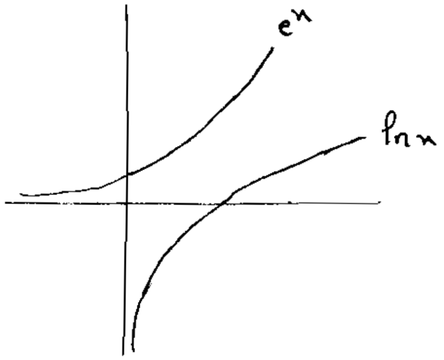
$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} - \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} - \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$ سه نقطه بحرانی

$f(0,0) = 0$

$f(1,1) = 1^4 + 1^4 - 4(1)(1) = -2$

$f(-1,-1) = (-1)^4 + (-1)^4 - 4(-1)(-1) = -2$

$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{bmatrix}$ نامعین است



مقدار ویژه

فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ و x یک بردار n تایی مخالف صفر باشد اگر $Ax=\lambda x$ باشد آنگاه ، λ را مقدار ویژه و x را بردار ویژه متناظر آن می‌نامند.

$Ax=\lambda x \rightarrow \lambda x-Ax=0$ (x بردار است)

$(\lambda I-A)x=0$ با فاکتور دستگاه تکین ← جواب غیرصفر زمانی که $\det=0$

$\det(\lambda I-A)=0$ از حل این معادله ← مقادیر λ = معلوم گردد

چندجمله‌ای مشخصه ماتریس

$$A=\begin{pmatrix}3&2\\1&3\end{pmatrix}$$

$\det(\lambda I-A)$ یک چندجمله‌ای برحسب λ از درجه n می‌باشد این چندجمله‌ای را چندجمله‌ای مشخصه ماتریس می‌نامند.

$$\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda-3&-2\\-1&\lambda-3\end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I-A)=(\lambda-3)^2-2=\lambda^2-6\lambda+9-2=\lambda^2-6\lambda+7$$

از نظر ریاضی باید λI اول نوشته شود

$Ax=b$

$\det A\neq 0 \rightarrow A^{-1}$ وجود دارد

$\underbrace{A^{-1}A}X=A^{-1}b$

$IX=A^{-1}b$

$X=A^{-1}b \rightarrow$ مشخص است

(درایه‌ها صفر)

نتیجه: یک دستگاه معادلات خطی همگن زمانی جواب غیرصفر (بدیهی) دارد که دترمینان ماتریس ضرایب آن صفر باشد.

فرض کنید n تا مقدار ویژه λ_1 ، λ_2 ، … تا λ_n داریم لذا بردارهای ویژه x_1 ، x_2 ، … تا x_n هستند.

$Ax=\lambda x$

$Ax_1=\lambda_1 x_1$

$\vdots$

$Ax_n=\lambda_n x_n$

$$A\overset{\text{بردارند}}{\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&\\0&0&\lambda_3&\cdots\\0&0&0&\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}^{\overset{\text{ترانهاده}}{T}}$$

جابجایشان را عوض

$AP=PD \rightarrow$ ماتریس قطری به اسم D

$$\xrightarrow{\text{طرفین در } P^{-1} \text{ ضرب}} P^{-1}AP=\underbrace{P^{-1}P}_{1}D$$

$$P^{-1}AP=D \xrightarrow[P^{-1}=P^{t}]{\text{تعویض}} \overset{\text{ترانهاده}}{P^{t}}AP=D$$

ص ۲۵

فرم درجه دوم متناظر A

$$Q_A(x) = x^T A x$$

$$\xrightarrow[x=Py]{\text{تغییر متغیر}} = (Py)^T A (Py) = y^T \boxed{P^T A P} y$$

$$= y^T D y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ بردار دلخواه

$y^1 = (1, 0, \ldots, 0)$

$y^2 = (0, 1, \ldots, 0)$

با جایگذاری بردارهای خاص (y)
می‌توان مقادیر λ_1، λ_2 و ... را
بدست آورد. (مقادیر ویژه λ)
(با داشتن فرم درجه دوم ماتریس)

مثال ۲.۵.۱ ص ۲۶

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

تمرین ۱۰ قسمت d ص ۲۸

d) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - 1)^2$

$= (4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + (x_3^2 - 2x_3 + 1)$

$= 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 - 2x_3 + 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 8x_1 - 4x_2 = 0 \to 2x_1 = x_2 \to x_1 = \frac{1}{2}x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} -4(\tfrac{1}{2}x_2) + 4x_2 - 2(\tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}) = 0$$

$$-2x_2 + 4x_2 - x_2 - 1 = 0 \to x_2 = 1 \to x_1 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = -2x_2 + 4x_3 - 2 = 0 \to 4x_3 = 2x_2 + 2 \to x_3 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}$$

$x_3 = 1$

$$H f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{matrix} \longrightarrow \text{مثبت}$$

چهارشنبه ۹۱,۱۲,۶ تعطیل رسمی

چهارشنبه ۹۱,۲,۱۳ تعطیل به علت مریضی استاد

درس برنامه ریزی غیرخطی روز چهارشنبه ۹۱,۲,۲۰ - جلسه ششم

فصل ۳ روشهای تکراری برای بهینه سازی نامقید

ص ۹۷

$F(x)$ پیدا کردن نقاط بحرانی

$F(x): R^n \to R$

Max یا Min $F(x)$

$\nabla F(x) = 0 \to$ نقاط بحرانی

$\downarrow$

حل با روشهای تکراری ← معمولاً دستگاه غیرخطی

$F(x) = 0 \xrightarrow{\text{به صورت}} x = g(x)$

$x^{(k+1)} = g(x^k)$

$x^{(0)}$ نقطه شروع

$x^{(1)} = g(x^{(0)})$

$x^{(2)} = g(x^{(1)})$

$\vdots$

$x^{(k)} = g(x^{(k-1)})$

$x^k \to x^*$ جواب $F(x)=0$ می باشد.

روش نیوتن

بسط تیلور $F(x) = F(x^*) + F'(x')(x-x^*)$ تک متغیره

x^* جواب معادله $F(x)=0$ باشد می توان گفت

$F(x) = 0 + F'(x')(x-x^*)$

یکی از روشهای حل دستگاه های غیرخطی فوق روش نیوتن می باشد.

$x - x^* = \frac{F(x)}{F'(x')}$ x' نقطه‌ای بین x و x^*

$x^* = x - \frac{F(x)}{F'(x')}$

$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{F(x^*)}{F'(x^{(k)})}$

نقطه شروع $= x^{(0)} \to$ قرار دهید دنباله به جایی می رسد که آن نقطه جواب x^* را باشد.

چند متغیره $F(x) = F(x^*) + \nabla F(x')(x-x^*)$

$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [\nabla F(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)})$

مثال با دستگاه معادله غیرخطی زیر برای حل از روش تکراری که یکی از آنها روش نیوتن می‌باشد استفاده می‌شود.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \\ x^2+y^2-z=1 \\ x+y+z=3 \end{cases}$$

$$F(x)=(\overbrace{x^2+y^2+z^2-3}^{f_1}\ ,\ \overbrace{x^2+y^2-z-1}^{f_2}\ ,\ \overbrace{x+y+z-3}^{f_3})=0$$

$f(x): R^3 \longrightarrow R^3$

$\nabla F(x) =$ ماتریس 3×3

$$\nabla F(x)=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix}$$

ماتریس ژاکوبین

$$\nabla F(x)=\begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla F(x^{(0)})=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$[\nabla F(x^{(0)})]^{-1} = 3\times3$ ماتریس

$$x^{(1)}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

درس برنامه‌ریزی غیرخطی روز چهارشنبه ۹۱,۲,۲۷ ـ جلسه هفتم

برای حل غیرخطی → خطی یا غیرخطی $\nabla F(x) = 0$

$$x^{(0)} \longrightarrow x^{(1)} \longrightarrow x^{(2)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow x^{*}$$

$g(x) = 0$ → بردار گرادیان $F(x)$

$g(x): R^n \longrightarrow R^n$

$$x^{(K+1)} = x^K - \left[\nabla g(x)^{(k)}\right]^{-1} g(x^{(k)})$$

$x^{(K+1)} - x^K = -\underbrace{\left[\nabla g(x^{(k)})\right]}_{A}^{-1} g(x^{(k)})$ طرفین در وارون A ضرب می‌کرد

$[\nabla g(x^{(k)})](x^{(k+1)} - x^K) = -g(x^{(k)})$ روش برای فرار از بدست آوردن وارون هسیان f

مثال ص ۱۰۱

تان

$$g(x) = \nabla f(x) = (x^2+y^2+z^2-3,\ x^2+y^2-z-1,\ x+y+z-3)$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 3 \\ x^2+y^2-z = 1 \\ x+y+z = 3 \end{cases}$$

غیرخطی → $\nabla F = 0$ بردار

→ برای جواب دقیق → شرایط حل

→ Min یا Max → تا تعیین جواب

$x^{(0)}$ نقطه شروع است و نزدیک جواب

$$\underset{\text{ماتریس ژاکوبین}}{\nabla g(x)} = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{هسیان } f$$

$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ نقطه ابتدایی فرضی (نزدیک به جواب)

$$x^{(1)} = x^{(0)} - [\nabla g(x^{(0)})]^{-1} g(x^{(0)})$$

$$\nabla g(x^{(-1)}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\nabla g(x^{(k)})]\underbrace{(x^{(k+1)} - x^{(k)})}_{A} = -g(x^{(k)})$$

$$x^{(1)} - x^{(0)} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xleftarrow{A} K=0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{}{}_{3\times 3} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z-1 \end{pmatrix}_{3\times 1} = -\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{}{}_{3\times 1} \longrightarrow \begin{cases} 2(x-1) + 0 + 2(z-1) = 1 \\ 2(x-1) + 0 - 1(z-1) = 1 \\ x-1+y+z-1 = 1 \end{cases}$$

در $\nabla g(x)$ نقطه $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ را جایگذاری

مختصات نقطه آغازین در $g(x)$ و جایگذاری

$$\begin{cases} ① & 2x + 2z = 5 \\ ② & 2x - z = 2 \\ ③ & x+y+z = 3 \end{cases} \longrightarrow x, y, z$$

بدست می‌آید ⑧

تعمیم : این ماتریس وارون پذیر باید باشد تا جواب داشته باشیم.

$②, ① \rightarrow 6x + 0 = 9 \rightarrow x = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

$2\left(\frac{3}{2}\right) - z = 2 \rightarrow z = 1$

$y = \frac{1}{2}$

$$\longrightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

برای مرحله بعدی از این نقطه استفاده می‌کنیم تا گام به گام به جواب واقعی نزدیک شویم .

LU تجزیه یا $A = LU$

ماتریس پایین مثلثی   ماتریس بالا مثلثی

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{1}{\cancel{U_{11}}} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & \overset{1}{\cancel{U_{22}}} & U_{23} \\ 0 & 0 & \overset{1}{\cancel{U_{33}}} \end{pmatrix}$$

برای ماتریس‌های بزرگتر از روش LU تجزیه ماتریس استفاده می‌شود در اینجا نشان برای 3×3 آورده شده است .

$L_{11} = 2$ ستون اول × سطر اول

تعداد مجهول = تعداد معلوم

↓

قطر اصلی یکی از ماتریس‌ها را 1 می‌گیریم

↓

$L_{11} U_{12} = 0 \rightarrow U_{12} = 0$

$L_{11} U_{13} + 0 = 2 \rightarrow U_{13} = 0$

$L_{21} + L_{22}(0) + 0 = 2 \rightarrow L_{21} = 2$ در اینجا ماتریس بالا مثلثی قطرش را یک گرفتیم

$L_{21} U_{12} + L_{22}(1) + 0 = 0 \rightarrow 2(0) + L_{22} = 0 \rightarrow L_{22} = 0$

$\longrightarrow 2(1) + 0(U_{23}) + 0 = -1$

در اینجا از روش تجزیه نمی‌توان استفاده کرد چون دارای دو صفر است در Ⓐ

$$\text{ماتریس} = (\overset{\text{تجزیه}}{A}) \times \underbrace{(B)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

$$= \text{ماتریس } A \times \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{matrix} x_1 = \\ y_1 = \\ z_1 = \end{matrix}$$ بدست می‌آید

حل دستگاه معادلات غیرخطی زیر به روش نیوتن

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \\ x^2+y^2-z=1 \\ x+y+z=3 \end{cases}$$

$$\underbrace{g(x,y,z)}_{g(x)} = \Big(\underbrace{x^2+y^2+z^2-3}_{f_1} \,,\, \underbrace{x^2+y^2-z-1}_{f_2} \,,\, \underbrace{x+y+z-3}_{f_3}\Big)$$

$$\underbrace{\left[\nabla g(x^{(k)})\right]}_{A} \underbrace{(x^{(k+1)}-x^{(k)})}_{B} = \underbrace{-g(x^{(k)})}_{C} \qquad ①$$

$$A \rightarrow \nabla g(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[x^{(0)}=(1\ 0\ 1)]{\text{نقطه ابتدایی فرض جایگذاری}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ نقطه مجهول

$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ نقطه ابتدایی

$$B \rightarrow x^{(k+1)} - x^{(k)} \xrightarrow{k=0} x^{(1)} - x^{(0)} =$$

$$x^{(1)} - x^{(0)} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

$C \rightarrow$ مختصات نقطه آغازین را در $g(x)$ جایگذاری $\rightarrow \; = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$① \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z-1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2(x-1)+0(y-0)+2(z-1)=1 \\ 2(x-1)+0(y-0)+(-1)(z-1)=1 \\ 1(x-1)+1(y-0)+1(z-1)=1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x+2z=5 \\ 2x-z=2 \\ x+y+z=3 \end{cases}$$

$\rightarrow$ حل x, y, z برای $x^{(1)}$ بدست آید

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

تکرار بعدی $x^{(2)}$ را با استفاده از $x^{(1)}$ و معادله ① محاسبه می‌کنیم.

درس برنامه‌ریزی غیرخطی روز چهارشنبه ۹۱,۴,۴ - جلسه هشتم

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=0 \\ x_1-2x_2+3x_3+x_4=-5 \\ 2x_1-3x_2+5x_3+x_4=-5 \\ x_1+2x_2-x_3+6x_4=3 \end{cases}$$

LU تجزیه — ماتریس L — ماتریس U

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & 1 & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & 1 & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A=L+D+U$

$Ax=b \rightarrow (L+D)x+Ux=b \rightarrow (L+D)x^{(K+1)}=b-Ux^{(K)}$ لازم نیست

$x^{(K+1)}=\underbrace{(L+D)^{-1}}_{\text{بدست آوردن دادن}}\left[b-Ux^{(K)}\right]$ روش ژاکوبی

بعد از ضرب ماتریس L در ماتریس U خواهیم داشت :

$L_{11}=4$

$4U_{12}+0=2 \longrightarrow U_{14}=\frac{1}{2}$

$4U_{13}=-1 \longrightarrow U_{13}=-\frac{1}{4}$

$4U_{14}=0 \longrightarrow U_{14}=0$

$L_{21}\times 1+0=1 \longrightarrow L_{21}=1$

$\frac{1}{2}+L_{22}+0=-2 \longrightarrow L_{22}=-\frac{5}{2}$

$-\frac{1}{4}-\frac{5}{2}U_{23}+0=3 \longrightarrow U_{23}=-\frac{13}{10}$

$0+(-\frac{5}{2})U_{24}+0=1 \longrightarrow U_{24}=-\frac{2}{5}$

$L_{31}=2$

$1+L_{32}=-3 \longrightarrow L_{32}=-4$

$-\frac{1}{2}+\frac{26}{5}+L_{33}=5 \longrightarrow L_{33}=\frac{3}{10}$

$\frac{8}{5}+\frac{3}{10}U_{34}=1 \longrightarrow U_{34}=-2$

$1\times\frac{1}{2}+L_{42}=2 \longrightarrow L_{42}=\frac{3}{2}$

$-\frac{1}{4}-\frac{39}{20}+L_{43}=-1 \longrightarrow L_{43}=\frac{24}{20}=\frac{6}{5}$

$-\frac{3}{5}-\frac{12}{5}+L_{44}=6 \longrightarrow L_{44}=9$

$$Ax = b$$

$$(L\underbrace{U)x}_{z} = b$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{10} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 10 \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \qquad ①$$

$$LZ = b$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 2 & -4 & \frac{3}{10} & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{6}{5} & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$4z_1 = 0 \longrightarrow z_1 = 0$$

$$z_1 - \frac{5}{2} z_2 = -5 \longrightarrow z_2 = 2$$

$$2z_1 - 4z_2 + \frac{3}{10} z_3 = -5 \longrightarrow z_3 = 10$$

$$z_1 + \frac{3}{2} z_2 + \frac{6}{5} z_3 + 9 z_4 = 3 \longrightarrow z_4 = -\frac{4}{3}$$

$\longrightarrow$ جایگذاری در بالا ① و بدست آوردن x ها

$$① \longrightarrow x_4 = -\frac{4}{3}$$

$$x_3 - 2x_4 = 10 \longrightarrow x_3 = \frac{22}{3}$$

$$x_2 - \frac{13}{10} x_3 - \frac{2}{5} x_4 = 2 \longrightarrow x_2 = 11$$

$$x_1 + \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{4} x_3 = 0 \longrightarrow x_1 = -\frac{11}{3}$$

Min یا Max $f(x)$ حداکثر درجه ۲

$\nabla f(x)=0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}=0$ می‌شود حل کرد → سادهٔ خطی

$$\underbrace{\begin{matrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}=0\\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}=0\end{matrix}}$$

آنگاه دستگاه غیرخطی شد → کل دستگاه $= g(x)$

$\nabla g(x)=H(f)$

$x^{(K+1)}=x^{(K)}-\left[\overset{\nabla g(x^{(K)})}{\cancel{H(f)}}\right]^{-1} g(x^{(K)}) \longrightarrow$ تبدیل به دستگاه معادله → حل به روش نیوتن

حذفی گاوس یا تجزیه LU

فصل ۷ ص ۲۷۹

بهینه‌سازی با قیود مساوی

مقیدها می‌توانند به نامقید تبدیل شوند یکی از روش‌ها ضریب لاگرانژ می‌باشد.

Min $f(x)$

$g(x)=0$

$x \geq 0$ شرط ضرایب لاگرانژ

$L(x,\lambda)=f(x)-\lambda g(x)$ تابع لاگرانژ → به دست آوردن نقطه بحرانی

$$\left[\begin{matrix}\frac{\partial L}{\partial x_j}=0 & j=1,2,\dots,n & \text{تعداد متغیرها}\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}=0 & i=1,2,\dots,m & \text{تعداد محدودیت‌ها}\end{matrix}\right. \longrightarrow$$

حل می‌کنیم و نقاطی

به دست می‌آوریم

$x^{(0)}=(x_1^{\cdot}, x_2^{\cdot}, \dots, x_n^{\cdot})$ یک نقطه بحرانی برای دستگاه فوق باشد → Max / Min تعیین می‌کنیم آیا

ماتریس هسیان دسته‌بندی شده

مشابه روش نامقید که از ماتریس هسیان استفاده می‌کردیم از ماتریس بلوکی استفاده می‌کنیم

$$H^B=\left[\begin{array}{c|c}\overset{\text{صفر}}{0} & P\\ \hline P^t & Q\end{array}\right]\Big)m+n$$

ماتریس $(m+n)(m+n)$

$$P=\begin{bmatrix}\nabla g_1(x)\\ \nabla g_2(x)\\ \vdots \\ \nabla g_m(x)\end{bmatrix}^{m+n} \qquad Q=\left[\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{i,j}=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n}\\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n}\\ \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{} & \frac{\partial^2 L}{} & & \frac{\partial^2 L}{}\end{bmatrix}$$

نتیجه گیری

نقطه $x^{(0)}$ که یک نقطه بحرانی بدست آمده از حل دستگاه مذکور می‌باشد

۱) یک نقطه ماکزیمم است اگر با دترمینان اصلی از مرتبه $(2m+1)$ شروع نمائیم آخرین $(n-m)$ زیر دترمینان های اصلی از H^B دارای علامت $(-1)^{n+1}$ باشند. (یک در میان مثبت و منفی)

۲) یک نقطه مینیمم است اگر با زیر دترمینان اصلی از مرتبه $(2m+1)$ شروع نمائیم آخرین $(n-m)$ زیر دترمینان های اصلی از H^B دارای علامت $(-1)^m$ باشند. توجه کنیم که این شرایط برای تشخیص نقطه رأسی کافی هستند و نه لازم به عبارت دیگر یک نقطه ممکن است نقطه رأسی باشد (Max یا Min) بدون آنکه در این شرایط صدق کند.

شرایط گفته شده را ساده سازی می‌کنیم :

$$\cancel{H^B} = \left[\begin{array}{c|c} \overset{\text{صفر}}{0} & P \\ \hline P^t & Q-\mu I \end{array}\right]$$ Δ می‌نامیم

ماتریس Δ را تعریف می‌کنیم بطوریکه P و Q همان ماتریس‌های تعریف شده در H^B بوده و μ یک پارامتر نامعلوم است و I یک ماتریس همانی در اینصورت $|\Delta|$ دترمینان دلتا باید :

۱) منفی باشد اگر $x^{(0)}$ یک نقطه ماکزیمم باشد.

۲) مثبت باشد اگر $x^{(0)}$ یک نقطه مینیمم باشد.

مثال

$$\operatorname{Min} F_{(x)} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$$ محدودیت ۱

$$5x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$ محدودیت ۲

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$L(x,\lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \lambda_1(x_1+x_2+3x_3-2) - \lambda_2(5x_1+2x_2+x_3-5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 - 5\lambda_2 = 0 \qquad Ⓒ$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \qquad Ⓓ$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 - 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \qquad Ⓔ$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1 + x_2 + 3x_3 - 2 = 0$$ ← عین همان محدودیت ها Ⓐ

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 = 0$$ ← عین همان محدودیت ها Ⓑ

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\lambda_1+5\lambda_2) + \frac{1}{2}(\lambda_1+2\lambda_2) + 3\times\frac{1}{2}(3\lambda_1+\lambda_2) - 2 = 0 \\ 5\times\frac{1}{2}(\lambda_1+5\lambda_2) + 2\times\frac{1}{2}(\lambda_1+2\lambda_2) + \frac{1}{2}(3\lambda_1+\lambda_2) - 5 = 0 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (0.81, 0.35, 0.28)$$ یک نقطه بحرانی بدست آمد

$$(\lambda_1, \lambda_2) = (0.0867, 0.3067)$$

$$H^B = \left[\begin{array}{cc|ccc} \overbrace{0 \quad 0}^{\text{ماتریس صفر}} & & \overbrace{1 \quad 1}^{P} & 3 & \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ \underbrace{3 \quad 1}_{P \text{ چرخش}} & & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

مشتق نسبت به x_1 ~ x_2 ~ x_3 ~ — Ⓐ

x_1 ~ x_2 ~ x_3 ~ ← Ⓑ

مشتق نسبت به x_1 ~ x_2 ~ x_3 ~ ← Ⓒ

x_1 ~ x_2 ~ x_3 ~ ← Ⓓ

x_1 ~ x_2 ~ x_3 ~ ← Ⓔ

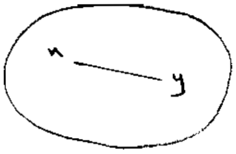
بدست می آوریم $= 460$

$$\underbrace{n-m}_{\text{تعداد متغیرها}\ \ \text{تعداد محدودیت ها}} = 3-2 = 1$$ زیرماتریس اصلی $\longrightarrow \det(H^B) \underbrace{> 0}_{\text{ثابت شود که دراینجا شده است}} \longrightarrow$ Min می شود

درس برنامه‌ریزی غیرخطی روز چهارشنبه ۹۱,۴,۱۰ - جلسه نهم

تعاریف از فصل ۲ ص ۴۴

مجموعه‌های محدب



$C \subset R^n$

پاره‌خط واصل x و y $x+\lambda(y-x)$

$\underbrace{\text{یا } (1-\lambda)x+\lambda y}$ $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$

نمایش نقاط پاره‌خط بین x و y

x و y $\xrightarrow{\text{چون}}$ منطقه موجه محدب است

در رابطه $x \geqslant 0$ $Ax \leqslant b$ صدق می‌کند

$y \geqslant 0$ $Ay \leqslant b$

$\text{Min } f(x) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$

$Ax \leqslant b$

$x \geqslant 0$

اگر x و y در منطقه موجه هستند پس خط واصل x و y نیز در آن منطقه هستند

$A[(1-\lambda)x+\lambda y] = (1-\lambda)Ax+\lambda Ay$

$\leqslant (1-\lambda)b+\lambda b = b$

$\longrightarrow$ صدق می‌کند $\longrightarrow$ منطقه موجه مربوطه محدب است

قضیه ص ۴۸

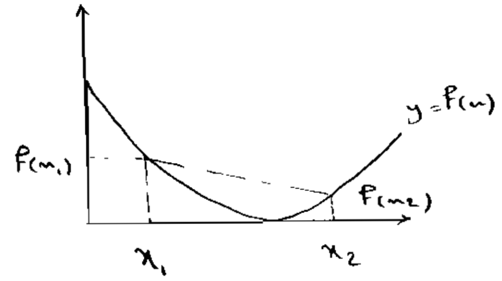
$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$

$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad -- \quad \lambda_k$ هرکدام یک ضریب

ترکیب محدب از k نقطه که در یک مجموعه محدب هستند محدب است.

اگر / جمع ضرایب $= 1 \longrightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i)}$ محدب است

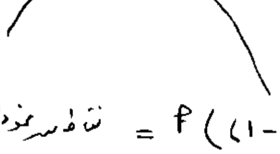
توابع محدب ص ۵۳



محدب $\longrightarrow$ روی نمودار $\longrightarrow$ ترکیب f ها

$(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$

مقعر $\longrightarrow$ زیر نمودار $\longrightarrow$ ترکیب f ها



اگر داشته باشیم نامساوی

f نقاط روی پاره‌خط هم محدب می‌شود

f نقاط روی نمودار $= f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2) \leqslant (1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$

محدب (و محدب اکید بدون مساوی)

تمرین ۴.۳.۲ ص ۶۰

تمرین ۷.۲.۲ ص ۶۴

مثال

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$$

$$\nabla f = (4x_1 , 2x_2 + 2x_3 , 2x_3 + 2x_2)$$

f هسیان $Hf = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

مینور اول $\Delta_1 = 4$

$\Delta_2 = 8 - 0 = 8$

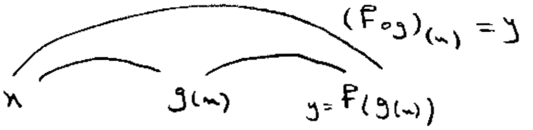
$\Delta_3 = 0$ دترمینان برحسب سطر اول

تمرین ۱۰.۲.۲ ص ۶۵

الف و ب فقط

قسمت ب

ترکیب توابع $(fog)_{(x)} = f(g(x))$



با بیان شترات

$f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + x_2^2}$ محدب = ?

شکل $\cancel{+}$

$f(x) = e^x$ محدب $\longrightarrow$ $f(g(x)) = f(x_1^2 + x_2^2) = e^{x_1^2 + x_2^2}$ محدب است

$g(x_1, x_2) = \underbrace{\underbrace{x_1^2}_{\text{محدب}} + \underbrace{x_2^2}_{\text{محدب}}}_{\text{محدب}} \longrightarrow$ شکل $\cup$

فصل ۵

بهینه سازی توابع غیرخطی با محدودیت های غیرتساوی ص ۱۹۷

شرایط کروش - کان - تاکر

توضیحات در کتاب

$$(P)\begin{cases} \text{Min } f(x) \\ \text{به شرط } \; g_i(x) \leqslant 0 \quad i=1,2,\dots,m \\ x \in C \subset R^n \end{cases}$$

مثال
$$\text{Min } f(x,y)=x^4+y^4$$
$$\text{s.t. } x^2-1 \leqslant 0$$
$$y^2-1 \leqslant 0$$
$$e^{x+y}-1 \leqslant 0$$
$$(x,y) \subset R^2$$

در تمامی محدودیت ها صدق می کند $\xrightarrow{\text{چون}}$ نقطه شدنی (0,0) نقطه انتخابی

(P) سازگار ⟵ چون مجموعه شدنی حداقل یک نقطه دارد

در محدودیت ها بعد از جاگذاری همه کوچکتر و در تمامی محدودیت ها تساوی برقرار نیست $\xrightarrow{\text{چون}}$ نقطه اسلاتر (0.5- , 0.5-) نقطه انتخابی

(P) زبر سازگار ⟵ چون یک نقطه اسلاتر وجود دارد

قضیه ۱۴.۲.۵ ص ۲۱۵

$$\left[\begin{array}{l} f(x) \quad \text{محدب} \\ \text{و ناحیه شدنی محدب} \end{array}\right. \longrightarrow P \text{ برنامه محدب}$$

شرایط
1) $\lambda_i^* \geqslant 0 \quad i=1,2,\dots,m$
2) $\lambda_i^* g_i(x^*)=0 \quad i=1,2,\dots,m$
3) $\nabla f(x)+\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*)=0$

ضرایب لاگرانژ

کروش - کان - تاکر

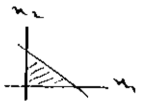
یکی از روش های حل برنامه ریزی غیرخطی برای حالتی که قیدها غیرتساوی باشند.

اگر در برنامه ریزی خطی کروش کان تاکر اجرا شود نقاط زینی بدست می آید.

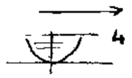
مثال ص ۲۱٦

$$\text{Min } F(x_1,x_2) = x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 + 1$$

$g_1(x_1,x_2) = \underbrace{x_1 + x_2}_{} \leqslant 0$ از روی شکل یک ناحیه محدب



$g_2(x_1,x_2) = \underbrace{x_1^2 - 4}_{} \leqslant 0$ از روی شکل یک ناحیه محدب



$$\text{تابع} = -\underbrace{\underbrace{(x_1-1)^2}_{\text{محدب}} + \underbrace{x_2^2}_{\text{محدب}}}_{\text{محدب}} \longrightarrow \text{خود تابع هم محدب} \longrightarrow \text{برنامه محدب}$$

* جوابهای بهینه

شرط اول 1) $\lambda_1^* \geqslant 0$, $\lambda_2^* \geqslant 0$

شرط دوم 2) $\lambda_1^*(x_1^* + x_2^*) = 0$, $\lambda_2^*(x_1^{2*} - 4) = 0$

شرط سوم 3) $2x_1^* - 2 + \lambda_1^*(1) + 2\lambda_2^* x_1^* = 0$

$2x_2^* + \lambda_1^*(1) + 0 = 0$ $\longrightarrow$ نتیجه می‌شود دستگاه معادلات

در ساده‌ترین فرض‌ها خطی است

در غیر اینصورت غیرخطی است برای حل روش نیوتن استفاده می‌کنیم

<u>حالت اول</u> $\underbrace{\lambda_1^* = 0 , \lambda_2^* = 0}_{} \longrightarrow x_1^* = 1 , x_2^* = 0$

$AB = 0 \longrightarrow$ یا $A=0$ یا $B=0$ $\longrightarrow$ در شرط دوم صفر شد $\lambda_1^* , \lambda_2^* = 0$

جواب فوق $\longrightarrow$ چون در محدودیت صدق نمی‌کند $\longrightarrow$ شدنی نیست

اگر فرض کنیم $x_1^{2*} - 4 = 0 \longrightarrow x_1^{2*} = 4 \longrightarrow x_1^* = \pm 2$ باید $+2$ باشد $\longrightarrow$ تا در محدودیت ۳

$x_2^* = \pm 2$ باید -2 باشد صدق کند

$\longrightarrow$ نقطه شدنی $\longrightarrow$ نقطه‌ی مینیمم کننده است

اگر $A \neq 0$, $B = 0 \longrightarrow x_1^* + x_2^* = 0 \longrightarrow x_1^* = -x_2^*$

$$\lambda_1^* = 0$$

$$\begin{aligned} 2x_1^* - 2 + \lambda_1^* &= 0 \\ 2x_2^* + \lambda_1^* &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} \cancel{2x_1^*} + \lambda_1^* &= 2 \\ -\cancel{2x_1^*} + \lambda_1^* &= 0 \\ \hline \lambda_1^* &= 1 \end{aligned}$$

$2x_1^* + 1 = 2 \longrightarrow 2x_1^* = 1 \longrightarrow x_1^* = \frac{1}{2}$ ✓ $\longrightarrow$ بعد از جایگذاری مینیمم است

$x_2^* = -\frac{1}{2}$ چهار جواب که یکی شدنی نیست . دو تای دیگر

هرکدام تابع هدف را کمتر کند مینیمم است .