LINEAR ASSIGNMENT

SIMPLE ADDITIVE WEIGHTING METHOD (SAW)

TOPSIS (TECHNIQUE FOR ORDER PREFERENCE BY SIMILARITY TO IDEAL SOLUTION)

ELECTRE

استاد گرامی: جناب آقای دکتر امیری

Linear Assignment

روش تخصیص خطی

- این مدل توسط Bernado و Blinبرای اولین بار در سال 1977 ارائه گردید.

- این مدل یکی از مدلهای جبرانی است و بیشتر در مورد مسائلی کاربرد دارد که اکثر معیارها کیفی هستند.به عبارت دیگر این روش زمانی کاربرد دارد که نمیتوان مقدار یا کمیتی را به معیار نسبت داد بنابراین نیازی به تبدیل معیارهای کیفی به کمی نیست.

- در این روش،هم رتبه بندی گزینه ها صورت می گیرد و هم وزن معیارها در دست است.

دو رویکرد برای حل این مدل در وجود دارد.

یک رویکرد برای رتبه بندی در این مدل، به این شکل است که مجموع رتبه ی هرکدام از گزینه ها را در نظر گرفته و آن را بصورت صعودی مرتب می کنیم.

در اینجا فرض می شود که تمام معیارها دارای وزن یکسانی باشند.

$(w1,w2,w3)=(0.2,0.3,0.5)$

رتبه	X1	X2	X3
اول	A1	A1	A2
دوم	A2	A3	A1
سوم	A3	A2	A3

Rank(A1)=1+1+2=4

Rank(A2)=2+3+1=6

Rank(A3)=3+2+3=8

اما این رویکرد اشکالاتی دارد،مثلا ممکن است رتبه بندی نهایی تنها به رتبه بندی فردی شخص بستگی داشته باشد. بنابراین رویکرد دیگری برای رتبه بندی وجود دارد

گام اول : ماتریس وزنها را از طریق تصمیم گیرنده یا از ماتریس مقایسه یا...بدست می آوریم.

گام دوم : ماتریس Π را محاسبه می کنیم. در مثال بالا ماتریس Π به شکل مقابل است:

رتبه	اول	دوم	سوم
A1	0.5	0.5	0
A2	0.5	0.2	0.3
A3	0	0.3	0.7

0.2+0.5=0.7

گام سوم : نوشتن مدل تخصیص

Max $X.=\sum_i \sum_j \pi ij \times Xij$ صرف نظر از نوع معیار تابع هدف ماکزیمم است

St: $\sum_i Xij = 1$

$\sum_j Xij = 1$ حل به روش مجارستانی یا با نرم افزار lingo

Xij=0 or 1

به عبارتی زمانی $X_{ik} = 1$ می شود که آلترناتیو i در رتبه ی k قرار گیرد.

گام چهارم: تعیین اولویت ها

مثال عددی :

برای انتخاب یک محل از بین چهار محل موجود، سه عامل قیمت (ق)، نزدیکی به محل کار (ن) و فرهنگ محله (ف) در نظر گرفته شده است. در صورتی که ترجیح عوامل به صورت ماتریس زیر باشد و قیمت محلهای 1و2و3و4 به ترتیب برابر 200 و 300 و 100 و 400 و فاصله آنها از محل کار به ترتیب 10 و 15 و 20 و 25 واحد باشد و از نظر فرهنگی دارای امتیازهای 15و20و30و35 باشند. در صورتی که برای معیارهای کمی ترجیحات بصورت خطی در نظر گرفته شود:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{ق} & \text{ن} & \text{ف} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{ق} \\ \text{ن} \\ \text{ف} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

با استفاده از تخصیص خطی مکانها را اولویت بندی کنید؟

جواب:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\div(\frac{11}{6},4,5)} \begin{bmatrix} 0.545 & 0.5 & 0.6 \\ 0.273 & 0.25 & 0.2 \\ 0.183 & 0.25 & 0.2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{\sum \text{سطر}}{3}} \begin{bmatrix} W_1 = 0.55 \\ W_2 = 0.241 \\ W_3 = 0.211 \end{bmatrix}$$

1. محاسبه ماتریس رتبه ها

رتبه	X_1	X_2	X_3
اول	A_3	A_1	A_1
دوم	A_1	A_2	A_2
سوم	A_2	A_3	A_4
چهارم	A_4	A_4	A_3

2. محاسبه ماتریس Π

$$
\begin{array}{c}
\\
A_1\\
A_2\\
A_3\\
A_4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
\text{اول} & \text{دوم} & \text{سوم} & \text{چهارم}
\end{array}\\
\begin{bmatrix}
0.45 & 0.55 & 0 & 0\\
0 & 0.45 & 0.55 & 0\\
0.55 & 0 & 0.24 & 0.21\\
0 & 0 & 0.21 & 0.79
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

۲. نوشتن مدل تخصیص و حل با روش مجارستانی

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}\begin{bmatrix} 0.45 & 0.55 & 0 & 0 \\ 0 & 0.45 & 0.55 & 0 \\ 0.55 & 0 & 0.24 & 0.21 \\ 0 & 0 & 0.21 & 0.79 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -0.45 & -0.55 & 0 & 0 \\ 0 & -0.45 & -0.55 & 0 \\ -0.55 & 0 & -0.24 & -0.21 \\ 0 & 0 & -0.21 & -0.79 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.1 & \mathbf{0} & 0.55 & 0.79 \\ 0.55 & 0.1 & \mathbf{0} & 0.79 \\ \mathbf{0} & 0.55 & 0.31 & 0.58 \\ 0.55 & 0.55 & 0.34 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \longrightarrow [-0.55 \quad -0.55 \quad -0.55 \quad -0.79]$$

$A_3 \to A_1 \to A_2 \to A_4$

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

پس اولویت بندی به صورت زیر است:

$$A_3 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_4$$

Simple additive weighting method (saw)

روش وزن دهی تجمعی ساده

- روش saw یکی از بهترین و مورد استفاده ترین روشهای MADM می باشد.

- این روش توسط Mac Crimmon در سال 1968 بیان شده است. اصول مباحث پایه از Churchman و Ackoff در سال 1954 و Klee در سال 1971 گرفته شده است.

مراحل SAW

گام اول: تصمیم گیرنده برای هر یک از معیارها در SAW، وزن های اهمیت در نظر می گیرد که ضرایب متغیر نامیده می شود.

گام دوم: تصمیم گیرنده سپس می تواند با ضرب ارزش هر معیار در وزن نشان داده شده معیار و جمع آنها یک مقدار نهایی برای هر آلترناتیو را ایجاد کند.

گام سوم: بعد از اینکه وزن های نهایی هر آلترناتیو تخمین زده می شود، آلترناتیو با بالاترین وزن (بالاترین متوسط وزن) برای تصمیم گیرنده ایجاد می شود.

بیان روش SAW به صورت ریاضی

گام اول: یک سری وزن های اهمیت توسط تصمیم گیرنده برای آلترناتیو ها فرض می شود.

$$W = \{W_1, W_2, \dots, W_n\}$$

گام دوم: سپس آلترناتیو ارجح تر به صورت زیر انتخاب می شود.

$$A^* = \{A_i \mid \max_i \textstyle\sum_{j=1}^{n} W_j X_{ij} \,/\, \textstyle\sum_{j=1}^{n} W_j\}$$

معمولا وزن ها نرمالایز شده هستند یعنی

$$\sum_{j=1}^{n} W_j = 1$$

مثال عددی: (مسئله هواپیمای جنگنده)

X_1: سرعت — X_2: ظرفیت — X_3: شتاب — X_4: هزینه حمل — X_5: قابلیت اطمینان — X_6: قدرت مانور

$$D = \begin{array}{cccccc|c} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & \\ \hline 2.0 & 1500 & 20000 & 5.5 & 5 & 9 & A_1 \\ 2.5 & 2700 & 18000 & 6.5 & 3 & 5 & A_2 \\ 1.8 & 2000 & 21000 & 4.5 & 7 & 7 & A_3 \\ 2.2 & 1800 & 20000 & 5.0 & 5 & 5 & A_4 \end{array}$$

چون اعداد موجود در ماتریس تصمیم قابل مقایسه با هم نمی باشند باید آنها را هم مقیاس نمود.

فرمول1. معیار سود

$$r_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j^{max}}$$

فرمول2. معیار هزینه

$$r_{ij} = \frac{X_j^{min}}{X_{ij}}$$

$$r_{11} = \frac{2.0}{2.5} = 0.80$$

$$r_{21} = \frac{2.5}{2.5} = 1.00$$

$$r_{31} = \frac{1.8}{2.5} = 0.72$$

$$r_{41} = \frac{2.2}{2.5} = 0.88$$

به غیر از X4 بقیه جنبه سود (مثبت) دارند.

$$R = \begin{array}{cccccc|c} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & \\ 0.80 & 0.56 & 0.95 & 0.82 & 0.71 & 1.00 & A_1 \\ 1.00 & 1.00 & 0.86 & 0.69 & 0.43 & 0.56 & A_2 \\ 0.72 & 0.74 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 0.78 & A_3 \\ 0.88 & 0.67 & 0.95 & 0.90 & 0.71 & 0.36 & A_4 \end{array}$$

فرض می کنیم وزن های نشان داده شده تصمیم گیرنده به صورت زیر است

$$W = \{0.2\ ,0.1\ ,0.1\ ,0.1\ ,0.2\ ,0.3\}$$

$$A_1 = \sum_{j=1}^{6} W_j r_{1j} =$$

$$(0.2 * 0.80) + (0.56 * 0.1) + (0.95 * 0.1) + (0.82 * 0.1) * (0.71 * 0.2) + (1.00 * 0.3)$$

$$= 0.835$$

$A_2 = 0.709$

$A_3 = 0.852$

$A_4 = 0.738$

$$A_3 > A_1 > A_4 > A_2$$

مثال عددی :

برای انتخاب یک محل از بین چهار محل موجود، سه عامل قیمت (ق)، نزدیکی به محل کار (ن) و فرهنگ محله (ف) در نظر گرفته شده است. در صورتی که ترجیح عوامل به صورت ماتریس زیر باشد و قیمت محلهای 1و2و3و4 به ترتیب برابر 200 و 300 و 100 و 400 و فاصله آنها از محل کار به ترتیب 10 و 15 و 20 و 25 واحد باشد و از نظر فرهنگی دارای امتیازهای 15و20و30و35 باشند. در صورتی که برای معیارهای کمی ترجیحات بصورت خطی در نظر گرفته شود:

با روش SAW بهترین مکان کدام است؟

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{ق} & \text{ن} & \text{ف} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{ق} \\ \text{ن} \\ \text{ف} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

جواب:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xRightarrow{\div(\frac{11}{6},4,5)} \begin{bmatrix} 0.545 & 0.5 & 0.6 \\ 0.273 & 0.25 & 0.2 \\ 0.183 & 0.25 & 0.2 \end{bmatrix} \xRightarrow{\frac{\sum \text{سطر}}{3}} \begin{bmatrix} W_1 = 0.55 \\ W_2 = 0.241 \\ W_3 = 0.211 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{ق}(-) & \text{ن}(-) & \text{ف}(+) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 200 & 10 & 15 \\ 300 & 15 & 20 \\ 100 & 20 & 40 \\ 400 & 25 & 35 \end{bmatrix} \end{array} \xRightarrow{\text{بی مقیاس خطی}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0.55 & 0.241 & 0.211 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0.375 \\ 0.33 & 0.67 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 1 \\ 0.25 & 0.4 & 0.875 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A_1 = (0.55 * 0.5) + (1 * 0.241) + (0.211 * 0.375) = 0.595$$

$$A_2 = (0.33 * 0.55) + (0.67 * 0.241) + (0.5 * 0.211) = 0.448$$

$$A_3 = (0.55 * 1) + (0.241 * 0.5) + (1 * 0.211) = 0.8815$$

$$A_4 = (0.25 * 0.55) + (0.4 * 0.241) + (0.875 * 0.211) = 0.418$$

$$A_3 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_4$$

از قابلیت های روش *SAW* می توان به موارد زیر اشاره نمود:

- سادگی و سهولت استفاده
- امکان رتبه بندی گزینه ها،راهکارها و یا استراتژی ها

از محدودیت های آن می توان موارد زیر را بیان نمود:

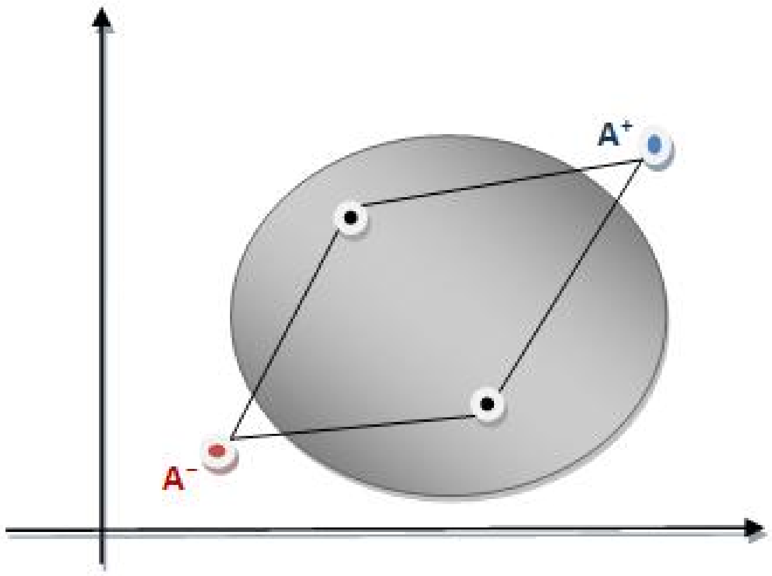
- فرض بکارگیری روش فوق بر استقلال و مجزا بودن آثار معیارها از یکدیگر است.
- عدم رعایت مورد فوق ممکن است به نتایج گمراه کننده و دور از واقعیت منجر شود.
- کمی سازی و بی مقیاس سازی معیارها

Technique For Order Preference By Similarity To Ideal Solution

TOPSIS روش

- یکی از پر کاربردترین مدلهای جبرانی است که برای اولین بار در سال 1981 توسط Yoon & Hwangارایه گردید.

- این روش،هر گزینه را یک نقطه در فضا در نظر میگیرد و فاصله ی اقلیدسی هر نقطه ازجواب ایده ال مثبت A^+ وجواب ایده ال منفی A^- محاسبه کرده و گزینه ای انتخاب می شود که در یک زمان،دارای کمترین فاصله از A^+ و بیشترین فاصله از A^- باشد.



الگوریتم Topsis :

گام اول: با استفاده از روش برداری ماتریس تصمیم گیری را نرمالایز می کند.

$$rij = \frac{xij}{\sqrt{\sum(xij)^2}}$$ ← نرمالایز برداری

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} r11 & \cdots & r1n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ rm1 & \cdots & rmn \end{bmatrix}$$ ← (ماتریس نرمالایز شده)

گام دوم: وزن هر معیار را در ستون مربوط به آن معیار،در ماتریس نرمالایزشده ضرب می کنیم تا ماتریس v حاصل شود.

$$v_{ij} = w_j r_{ij} \Longrightarrow V=\begin{bmatrix} v11 & \cdots & v1n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ vm1 & \cdots & vm2 \end{bmatrix}$$

گام سوم : تعریف گزینه ی ایده آل مثبت A^+ و منفی A^-

معیارهای از جنس سود

$$A^+ = \{(max\ v_{ij} | j \epsilon J) \cdot (min\ v_{ij} | j \epsilon J') | i = 1,2,3,\dots,m\} = \{v_1^+, v_2^+, \dots v_n^+\}$$

$$A^- = \{(min\ v_{ij} | j \epsilon J) \cdot (max\ v_{ij} | j \epsilon J') | i = 1,2,3,\dots,m\} = \{v_1^+, v_2^+, \dots v_n^+\}$$

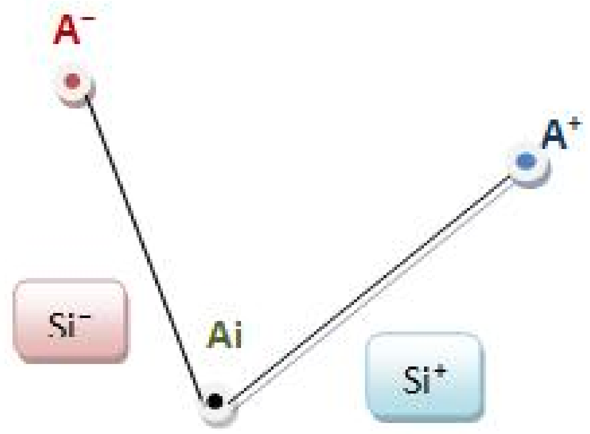
معیارهای از جنس هزینه

گام چهارم : فاصله ی هندسی تک تک گزینه ها را نسبت به A^+ و A^- بدست می آوریم.

$$(i=1,2,\dots,m) \quad Si^- = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(vij - vj^-)^2} \qquad Si^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(vij - vj^+)^2}$$

گام پنجم : برای هر گزینه i ام شاخص را به ترتیب زیر محاسبه می کنیم:

$$C_i = \frac{Si^-}{Si^- + Si^+} \qquad (0<C_i<1)$$



در بهترین حالت،iA بر روی A^+ قرار دارد و Ci=1 می شود و در

بدترین حالت،Ai بر روی A^- قرار دارد و Ci=0 می شود

گام ششم : رتبه بندی گزینه ها به صورت نزولی،با توجه به مقدار شاخص Ci

مثال عددی :

برای انتخاب یک محل از بین چهار محل موجود، سه عامل قیمت (ق)، نزدیکی به محل کار (ن) و فرهنگ محله (ف) در نظر گرفته شده است. در صورتی که ترجیح عوامل به صورت ماتریس زیر باشد و قیمت محلهای 1و2و3و4 به ترتیب برابر 200 و 300 و 100 و 400 و فاصله آنها از محل کار به ترتیب 10 و 15 و 20 و 25 واحد باشد و از نظر فرهنگی دارای امتیازهای 15و20و30و35 باشند. در صورتی که برای معیارهای کمی ترجیحات بصورت خطی در نظر گرفته شود:

با روش TOPSIS بهترین مکان کدام است؟

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{ف} & \text{ن} & \text{ق} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{ق} \\ \text{ن} \\ \text{ف} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

جواب:

1. نرمالایز

$$\begin{array}{c} \\ D= \end{array}\begin{bmatrix} 200 & 10 & 15 \\ 300 & 15 & 20 \\ 100 & 20 & 40 \\ 400 & 25 & 35 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{ij}=\frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4} x_{ij}^{2}}}} R = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0.55 & 0.241 & 0.211 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.365 & 0.27 & 0.25 \\ 0.548 & 0.41 & 0.34 \\ 0.182 & 0.54 & 0.68 \\ 0.73 & 0.68 & 0.596 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow{V_{ij}=W_j * X_{ij}}$$

2. ضرب نرمالایز در وزن

$$V= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} - & - & + \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.201 & 0.065 & 0.053 \\ 0.301 & 0.099 & 0.072 \\ 0.1 & 0.13 & 0.143 \\ 0.401 & 0.164 & 0.126 \end{bmatrix} \end{array}$$

3. محاسبه فاصله ی هر گزینه را از ایده آل های مثبت و منفی

$$A^{+} = \{0.1\ , 0.065\ , 0.143\} \qquad A^{-} = \{0.401\ , 0.164\ , 0.053\}$$

$$S_1^{+} = \sqrt{(0.201-0.1)^2+(0.065-0.065)^2+(0.053-0.143)^2} = 0.135$$

$$S_1^{-} = \sqrt{(0.201-0.401)^2+(0.065-0.164)^2+(0.053-0.053)^2} = 0.223$$

$$S_2^{+} = \sqrt{(0.301-0.1)^2+(0.099-0.065)^2+(0.072-0.143)^2} = 0.216$$

$$S_2^{-} = \sqrt{(0.301-0.401)^2+(0.099-0.164)^2+(0.072-0.053)^2} = 0.121$$

$$S_3^{+} = \sqrt{(0.1-0.1)^2+(0.13-0.065)^2+(0.143-0.143)^2} = 0.065$$

$$S_3^{-} = \sqrt{(0.1-0.401)^2+(0.13-0.164)^2+(0.143-0.053)^2} = 0.316$$

$$S_4^{+} = \sqrt{(0.401-0.1)^2+(0.164-0.065)^2+(0.126-0.143)^2} = 0.317$$

$$S_4^{-} = \sqrt{(0.401-0.401)^2+(0.164-0.164)^2+(0.126-0.053)^2} = 0.073$$

4. محاسبه ی شاخص Ci برای هر گزینه و رتبه بندی آلترناتیو ها با توجه به شاخص Ci

$$C_1 = \frac{S_1^-}{S_1^- + S_1^+} = \frac{0.223}{0.223 + 0.135} = 0.623$$

$$C_2 = \frac{S_2^-}{S_2^- + S_2^+} = \frac{0.121}{0.121 + 0.216} = 0.359$$

$$C_3 = \frac{S_3^-}{S_3^- + S_3^+} = \frac{0.316}{0.316 + 0.065} = 0.829$$

$$C_4 = \frac{S_4^-}{S_4^- + S_4^+} = \frac{0.073}{0.173 + 0.317} = 0.187$$

$$A_3 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_4$$

مثال 2:

جدول متقاضیان بورسیه دانشگاه

متقاضیان	GRE	GPA	college rating	recommendation rating	interview rating
Alfred	690	3.1	9	7	4
Beverly	590	3.9	7	6	10
Calvin	600	3.6	8	8	7
Diance	620	3.8	7	10	6
Edward	700	2.8	10	4	6
Fran	650	4.0	6	9	8

GRE: The Graduate Record Examination (GRE)is a commercially run standardized that is an admission requirement for many graduate schools in the United States.

GPA: Grade Point Average is a calculation of the average of all of a student's grades in United States.

$$
\begin{array}{c}
 \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0.4381 & 0.3555 & 0.4623 & 0.3763 & 0.2306 \\
0.3746 & 0.4472 & 0.3596 & 0.3226 & 0.5764 \\
0.3809 & 0.4128 & 0.4109 & 0.4301 & 0.4035 \\
0.3936 & 0.4357 & 0.3596 & 0.5376 & 0.3458 \\
0.4444 & 0.3211 & 0.5137 & 0.2150 & 0.3458 \\
0.4127 & 0.4587 & 0.3082 & 0.4838 & 0.4611
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

برای مثال X11 را به صورت زیر محاسبه می نماییم :

$$0.4381 = 690/\sqrt{(690^2 + 590^2 + . . . + 650^2)}$$

ماتریس وزن (0.3,0.2,0.2,0.15,0.15) =w

$$
\begin{array}{c}
A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F
\end{array}
\begin{bmatrix}
0.1314 & 0.0711 & 0.0925 & 0.0564 & 0.0346^{-} \\
0.1124^{-} & 0.0894 & 0.0719 & 0.0484 & 0.0865^{*} \\
0.1143 & 0.0826 & 0.0822 & 0.0645 & 0.0605 \\
0.1181 & 0.0871 & 0.0719 & 0.0806^{*} & 0.0519 \\
0.1333^{*} & 0.0642^{-} & 0.1027^{*} & 0.0323^{-} & 0.0519 \\
0.1238 & 0.0917^{*} & 0.0616^{-} & 0.0726 & 0.0692
\end{bmatrix}
$$

$$SA^{+} = \sqrt{\sum_{j=1}^{5}(vij - v^{+})^{2}} = [(0.1314 - 0.1333)^{2} + \cdots + (0.0346 - 0.0865)^{2}]^{1/2} = 0.0617$$

$$(SA^{+}, SB^{+}, SC^{+}, SD^{+}, SF^{+}, SE^{+}) = (0.0617, 0.0493, 0.0424, 0.0490, 0.0655, 0.0463)$$

$$SA^{-} = \sqrt{\sum_{j=1}^{5}(vij - vj^{-})^{2}} = [(0.1314 - 0.1124)^{2} + \cdots + (0.0346 - 0.0346)^{2}]^{1/2} = 0.0441$$

$$(SA^{-}, SB^{-}, SC^{-}, SD^{-}, SF^{-}, SE^{-}) = (0.0441, 0.0608, 0.0498, 0.0575, 0.0493, 0.0609)$$

$$C_A = \frac{SA^+}{SA^+ + SA^-} = \frac{0.0441}{0.0617 + 0.0441} = 0.4167$$

	S^+		S^-		C	
گزینه ها	rank	Value	rank	Value	rank	Value
A	5	0.0617	6	0.0441	6	0.4167
B	4	0.0493	2	0.0608	2	0.5519
C	1	0.0424	4	0.0498	4	0.5396
D	3	0.0490	3	0.0575	3	0.5399
E	6	0.0655	5	0.0493	5	0.4291
F	2	0.0463	1	0.0609	1	0.5681

$$F \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow A$$

مثال3:

0.2	0.3	0.4	0.1	Weight
cost	Fuel.Eco	reliability	style	
8	9	9	7	civic
7	8	7	8	Saturn
9	8	6	9	ford
6	8	7	6	Mazda

جواب:

cost	Fuel.Eco	reliability	style	
0.53	0.54	0.61	0.46	civic
0.46	0.48	0.48	0.53	Saturn
0.59	0.48	0.41	0.59	ford
0.40	0.48	0.48	0.40	Mazda

(-) Cost	**(+)**Fuel.Eco	**(+)**Reliability	**(+)**Style	
0.106	0.162	0.244	0.046	civic
0.092	0.144	0.192	0.053	Saturn
0.118	0.144	0.164	0.059	ford
0.080	0.144	0.192	0.040	Mazda

$$A^+ = \{0.059, 0.244, 0.162, 0.080\}$$

$$A^- = \{0.040, 0.164, 0.144, 0.118\}$$

$$S_1^+ = 0.029\ , S_2^+ = 0.057\ , S_3^+ = 0.090\ , S_4^+ = 0.058$$

$$S_1^- = 0.083\ , S_2^- = 0.040\ , S_3^- = 0.019\ , S_4^- = 0.047$$

$$C_i = \frac{Si^-}{Si^- + Si^+} \qquad (0 < C_i < 1)$$

$$C_1 = 0.74\ , C_2 = 0.41\ , C_3 = 0.17\ , C_4 = 0.45$$

$$Civic \rightarrow Mazda \rightarrow Saturn \rightarrow Ford$$

روش ELECTRE

- روش الکتری اولین بار توسط Benayoun در سال 1966 معرفی گردید که پس از آن Van Delft, Nijkamp, Roy آن را به شکل امروزی در سالهای 1976،1974،1973،1971 و 1977 توسعه داده اند.

- در این روش کلیه گزینه ها با استفاده از مقایسات غیر رتبه ای مورد ارزیابی قرار گرفته و بدان طریق گزینه های غیر موثر حذف می شوند.

- کلیه این مراحل بر مبنای یک مجموعه هماهنگ و یک مجموعه نا هماهنگ پایه ریزی می شوند که به دلیل این موضوع این روش معروف به آنالیز هماهنگی هم می باشد.

الگوریتم:

قدم اول: تبدیل ماتریس تصمیم گیری به یک ماتریس بی مقیاس

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2}}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix}$$

قدم دوم: تشکیل ماتریس بی مقیاس وزین V با استفاده از بردار معلوم W :   V = R W

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}w_1 & r_{12}w_2 & \cdots & r_{1n}w_n \\ r_{21}w_1 & r_{22}w_2 & \cdots & r_{2n}w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1}w_1 & r_{m2}w_2 & \cdots & r_{mn}w_n \end{bmatrix}$$

قدم سوم: مشخص نمودن مجموعه هماهنگ (C_{kl}) و ناهماهنگ (D_{kl}) برای هر زوج از گزینه های k, l

$(k , l = 1,2,3,\ldots,m \; ; \; l \neq k)$

$$C_{kl} = \{ j \mid x_{kj} \geq x_{lj} \}$$

$$D_{kl} = \{ j \mid x_{kj} < x_{lj} \} = J - C_{kl}$$

قدم چهارم: محاسبه ماتریس هماهنگی

$$C = \begin{bmatrix} - & c_{12} & . & . & . & c_{1m} \\ c_{21} & - & . & . & . & c_{2m} \\ . & . & - & . & . & . \\ . & . & . & \ddots & . & . \\ . & . & . & . & - & c_{(m-1)m} \\ c_{m1} & c_{m2} & . & . & c_{m(m-1)} & - \end{bmatrix}$$

$$C_{kl} = \frac{\sum_{j \in c_{kl}} w_j}{\sum_{j=1}^{n} w_j}$$

قدم پنجم: محاسبه ماتریس ناهماهنگی

$$d_{kl} = \frac{\max\limits_{j \varepsilon J} |v_{kj} - v_{lj}|}{\max\limits_{j \varepsilon D} |v_{kj} - v_{lj}|}$$

$$D = \begin{bmatrix} - & d_{12} & . & . & . & d_{1m} \\ d_{21} & - & . & . & . & d_{2m} \\ . & . & - & . & . & . \\ . & . & . & \ddots & . & . \\ . & . & . & . & - & d_{(m-1)m} \\ d_{m1} & d_{m2} & . & . & d_{m(m-1)} & - \end{bmatrix}$$

قدم ششم: مشخص نمودن ماتریس هماهنگ موثر

ارزشهای c_{kl} از ماتریس هماهنگی باید نسبت به یک ارزش آستانه سنجیده شوند .

$$\bar{c} = \frac{\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} c_{kl}}{m(m-1)} \qquad k \neq l$$

بر اساس c¯ (حداقل آستانه) سپس یک ماتریس بولین F (با عناصر صفر و یک) تشکیل می دهیم به گونه ای که:

$$f_{kl} = 1 \quad ,if \qquad c_{kl} \geq \bar{c}$$
$$f_{kl} = 0 \quad ,if \qquad c_{kl} < \bar{c}$$

قدم هفتم: مشخص نمودن ماتریس ناهماهنگ موثر

عناصر d_{kl} از ماتریس ناهماهنگ نیز همچون قدم ششم باید نسبت به یک ارزش آستانه سنجیده شوند.

$$\bar{d} = \frac{\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} d_{kl}}{m(m-1)} \quad ,k \neq 1$$

سپس یک ماتریس بولین G (معروف به ماتریس ناهماهنگ موثر) تشکیل می دهیم به طوری که:

$$g_{kl} = 1 \quad ,if \qquad d_{kl} \geq \bar{d}$$

$$g_{kl} = 1 \quad ,if \qquad d_{kl} \geq \bar{d}$$

قدم هشتم: مشخص نمودن ماتریس کلی و موثر

$$e_{kl} = f_{kl} \cdot g_{kl}$$

قدم نهم: حذف گزینه های کم جاذبه

بنابراین شرط اینکه A_k با استفاده از روش الکتری یک گزینه موثر باشد، عبارتست از:

$$e_{kl} = 1 \quad , \quad for\ at\ least\ one\ l \ , \quad l = 1,2,\dots,m \quad , \quad k \neq l$$

$$e_{ik} = 0 \quad , \quad for\ all\ i \quad , \quad i = 1,2,\dots,m \quad , \quad i \neq k \quad , \quad i \neq l$$

مزایا و معایب روش ELECTRE

معایب

یکی از نقاط ضعف روش الکتری استفاده از حداقل آستانه c^{-} و d^{-} جهت محاسبه ماتریس هماهنگی و ناهماهنگی موثر می باشد. زیرا با توجه به اینکه c^{-} و d^{-} نسبتا دلخواه بوده و همچنین می توانند روی جواب نهایی تا حد زیادی تاثیر گذار باشند به صورتی که اگر $c^{-}=1$ و $d^{-}=0$ حاصل شود حذف گزینه ها در برابر یکدیگر بسیار مشکل می شود و از طرف دیگر هر چه مقدار c^{-} کاهش و مقدار d^{-} افزایش یابد می توان تعداد گزینه های حذف شده در برابر سایر گزینه ها را به یک عدد کاهش داد.

مزایا

قوانین ساده، حداکثر استفاده از اطلاعات ماتریس تصمیم و در نهایت محاسبات منظم و منسجم آن است

مثال عددی :

برای انتخاب یک محل از بین چهار محل موجود، سه عامل قیمت (ق)، نزدیکی به محل کار (ن) و فرهنگ محله (ف) در نظر گرفته شده است. در صورتی که ترجیح عوامل به صورت ماتریس زیر باشد و قیمت محلهای 1و2و3و4 به ترتیب برابر 200 و 300 و 100 و 400 و فاصله آنها از محل کار به ترتیب 10 و 15 و 20 و 25 واحد باشد و از نظر فرهنگی دارای امتیازهای 15و20و30و35 باشند. در صورتی که برای معیارهای کمی ترجیحات بصورت خطی در نظر گرفته شود:

با روش Electre بهترین مکان کدام است؟

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{ق} & \text{ن} & \text{ف} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{ق} \\ \text{ن} \\ \text{ف} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

جواب:

قدم یک: محاسبه ماتریس تصمیم نرمالایز شده:

$$D=\begin{bmatrix}200 & 10 & 15\\ 300 & 15 & 20\\ 100 & 20 & 40\\ 400 & 25 & 35\end{bmatrix} \xrightarrow{r_{ij}=\frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4} x_{ij}^{2}}}} R=\begin{array}{ccc} 0.55 & 0.24 & 0.21 \\ \left[\begin{matrix}0.365 & 0.27 & 0.25\\ 0.548 & 0.41 & 0.34\\ 0.182 & 0.54 & 0.68\\ 0.73 & 0.68 & 0.596\end{matrix}\right. & & \left.\right] \end{array}$$

قدم دو: محاسبه ماتریس تصمیم وزین شده:

$$\xrightarrow{V_{ij}=W_j * X_{ij}} \quad V=\begin{array}{c} \begin{matrix}- & - & +\end{matrix} \\ \begin{bmatrix}0.201 & 0.065 & 0.053\\ 0.301 & 0.099 & 0.072\\ 0.1 & 0.13 & 0.143\\ 0.401 & 0.164 & 0.126\end{bmatrix}\end{array}$$

قدم سه: تعریف مجموعه هماهنگ و نا هماهنگ

$S_{12} = \{1,2\}$	$D_{12} = \{3\}$
$S_{13} = \{2\}$	$D_{13} = \{1,3\}$
$S_{14} = \{1,2\}$	$D_{14} = \{3\}$
$S_{21} = \{3\}$	$D_{21} = \{1,2\}$
$S_{23} = \{2\}$	$D_{23} = \{1,3\}$
$S_{24} = \{1,2\}$	$D_{24} = \{3\}$
$S_{31} = \{1,3\}$	$D_{31} = \{2\}$
$S_{32} = \{1,3\}$	$D_{32} = \{2\}$
$S_{34} = \{1,2,3\}$	$D_{34} = \{\}$
$S_{41} = \{3\}$	$D_{41} = \{1,2\}$
$S_{42} = \{3\}$	$D_{42} = \{1,2\}$
$S_{43} = \{\}$	$D_{43} = \{1,2,3\}$

قدم چهار: محاسبه ماتریس هماهنگی

$$I_{12} = W_1 + W_2 = 0.55 + 0.24 = 0.79$$

$$I_{13} = W_2 = 0.24$$

$$I_{14} = W_1 + W_2 = 0.55 + 0.24 = 0.79$$

$$I_{21} = W_3 = 0.21$$

$$I_{23} = W_2 = 0.24$$

$$I_{24} = W_1 + W_2 = 0.55 + 0.24 = 0.79$$

$$I_{31} = W_1 + W_3 = 0.55 + 0.21 = 0.76$$

$$I_{32} = W_1 + W_3 = 0.55 + 0.21 = 0.76$$

$$I_{34} = W_1 + W_2 + W_3 = 0.55 + 0.24 + 0.21 = 1$$

$$I_{41} = W_3 = 0.21$$

$$I_{42} = W_3 = 0.21$$

$$I_{43} = 0$$

قدم پنجم: محاسبه ماتریس ناهماهنگی

$$NI_{12} = \frac{MAX\{|0.053 - 0.072|\}}{MAX\{|0.201 - 0.301|, |0.065 - 0.099|, |0.053 - 0.072|\}} = \frac{0.019}{0.1} = 0.19$$

$$NI_{13} = \frac{MAX\{|0.201 - 0.1|, |0.053 - 0.143|\}}{MAX\{|0.201 - 0.1|, |0.065 - 0.13|, |0.053 - 0.143|\}} = \frac{0.101}{0.101} = 1$$

$$NI_{14} = \frac{MAX\{|0.053 - 0.126|\}}{MAX\{|0.201 - 0.401|, |0.065 - 0.164|, |0.053 - 0.126|\}} = \frac{0.073}{0.2} = 0.365$$

$$NI_{21} = \frac{MAX\{|0.201 - 0.301|, |0.065 - 0.099|\}}{MAX\{|0.201 - 0.301|, |0.065 - 0.099|, |0.053 - 0.072|\}} = \frac{0.1}{0.1} = 1$$

$$NI_{23} = \frac{MAX\{|0.301 - 0.1|, |0.072 - 0.143|\}}{MAX\{|0.301 - 0.1|, |0.099 - 0.13|, |0.072 - 0.143|\}} = \frac{0.201}{0.201} = 1$$

$$NI_{24} = \frac{MAX\{|0.072 - 0.126|\}}{MAX\{|0.301 - 0.401|, |0.099 - 0.164|, |0.072 - 0.126|\}} = \frac{0.054}{0.1} = 0.54$$

$$NI_{31} = \frac{MAX\{|0.065 - 0.13|\}}{MAX\{|0.201 - 0.1|, |0.065 - 0.13|, |0.053 - 0.143|\}} = \frac{0.065}{0.101} = 0.64$$

$$NI_{32} = \frac{MAX\{|0.099 - 0.13|\}}{MAX\{|0.301 - 0.1|, |0.099 - 0.13|, |0.072 - 0.143|\}} = \frac{0.031}{0.201} = 0.154$$

$$NI_{34} = \frac{MAX\{\}}{MAX\{|0.1 - 0.401|, |0.13 - 0.164|, |0.143 - 0.126|\}} = \frac{0}{0.301} = 0$$

$$NI_{41} = \frac{MAX\{|0.201 - 0.401|, |0.065 - 0.164|\}}{MAX\{|0.201 - 0.401|, |0.065 - 0.164|, |0.053 - 0.126|\}} = \frac{0.2}{0.2} = 1$$

$$NI_{42} = \frac{MAX\{|0.301 - 0.401|, |0.099 - 0.164|\}}{MAX\{|0.301 - 0.401|, |0.099 - 0.164|, |0.072 - 0.126|\}} = \frac{0.1}{0.1} = 1$$

$$NI_{43} = \frac{MAX\{|0.1 - 0.401|, |0.13 - 0.164|, |0.143 - 0.126|\}}{MAX\{|0.1 - 0.401|, |0.13 - 0.164|, |0.143 - 0.126|\}} = \frac{0.301}{0.301} = 1$$

قدم ششم: محاسبه یک حداقل آستانه از متوسط معیارهای هماهنگی و محاسبه ماتریس هماهنگ موثر:

$$I_{kl} = \begin{bmatrix} - & 0.79 & 0.24 & 0.79 \\ 0.21 & - & 0.24 & 0.79 \\ 0.76 & 0.76 & - & 1 \\ 0.21 & 0.21 & 0 & - \end{bmatrix} \xRightarrow{\bar{I}=\frac{6}{12}=0.5} H = \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & 1 \\ 0 & - & 0 & 1 \\ 1 & 1 & - & 1 \\ 0 & 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

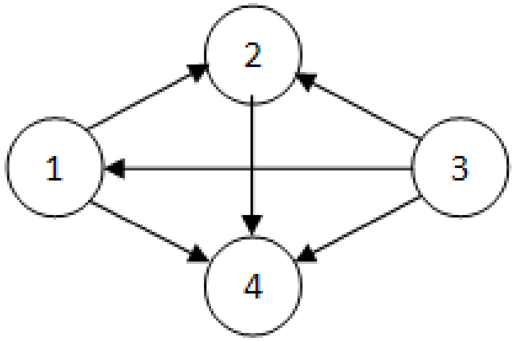
قدم هفتم: محاسبه یک حداقل آستانه از متوسط معیارهای ناهماهنگی و ماتریس ناهماهنگ موثر:

$$NI_{kl} = \begin{bmatrix} - & 0.19 & 1 & 0.365 \\ 1 & - & 1 & 0.54 \\ 0.64 & 0.154 & - & 0 \\ 1 & 1 & 1 & - \end{bmatrix} \xRightarrow{\frac{7.889}{12}=0.657} G = \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & 1 \\ 0 & - & 0 & 1 \\ 1 & 1 & - & 1 \\ 0 & 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

قدم هشتم: مشخص نمودن ماتریس کلی و موثر

$$F = H * G = \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & 1 \\ 0 & - & 0 & 1 \\ 1 & 1 & - & 1 \\ 0 & 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

قدم نهم: حذف گزینه های کم جاذبه



$$A_3 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_4$$

مساله هواپیماهای جنگنده

تبدیل مشخصه های کیفی به مشخصه های کمی با مقیاس very high=9, high=7, average=5, low=3 و سپس تشکیل ماتریس تصمیم مساله: تعیین وزن شاخصها توسط تصمیم گیرنده: W=(.2, .1, .1, .1, .2, .3)

$$D = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} \;\;x_1 & \;\;x_2 & \;\;x_3 & \;\;x_4 & \;\;x_5 & \;\;x_6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2.0 & 1.5 & 2.0 & 5.5 & 5.0 & 9.0 \\ 2.5 & 2.7 & 1.8 & 6.5 & 3.0 & 5.0 \\ 1.8 & 2.0 & 2.1 & 4.5 & 7.0 & 7.0 \\ 2.2 & 1.8 & 2.0 & 5.0 & 5.0 & 5.0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.4671 & 0.3662 & 0.5056 & 0.5063 & 0.4811 & 0.6708 \\ 0.5839 & 0.6591 & 0.4550 & 0.5983 & 0.2887 & 0.3727 \\ 0.4204 & 0.4882 & 0.5380 & 0.4143 & 0.6736 & 0.5217 \\ 0.5139 & 0.4392 & 0.5056 & 0.4603 & 0.4811 & 0.3727 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0.0934 & 0.0366 & 0.0506 & 0.0506 & 0.0962 & 0.2012 \\ 0.1168 & 0.0659 & 0.0455 & 0.0598 & 0.0577 & 0.1118 \\ 0.0841 & 0.0488 & 0.0531 & 0.0414 & 0.1347 & 0.1565 \\ 0.1028 & 0.0439 & 0.0506 & 0.0460 & 0.0962 & 0.1118 \end{bmatrix}$$

$C_{12} = \{3, 4, 5, 6\}$

$C_{13} = \{1, 6\}$

$C_{14} = \{3, 5, 6\}$

$C_{21} = \{1, 2\}$

$C_{23} = \{1, 2\}$

$C_{24} = \{1, 2, 6\}$

$C_{31} = \{2, 3, 4, 5\}$

$C_{32} = \{3, 4, 5, 6\}$

$C_{34} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$C_{41} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$C_{42} = \{3, 4, 5, 6\}$

$C_{43} = \{1\}$

$D_{12} = \{1, 2\}$

$D_{13} = \{2, 3, 4, 5\}$

$D_{14} = \{1, 2, 4\}$

$D_{21} = \{3, 4, 5, 6\}$

$D_{23} = \{3, 4, 5, 6\}$

$D_{24} = \{3, 4, 5\}$

$D_{31} = \{1, 6\}$

$D_{32} = \{1, 2\}$

$D_{34} = \{1\}$

$D_{41} = \{6\}$

$D_{42} = \{1, 2\}$

$D_{43} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$$C_{12} = \sum_{j \epsilon C_{12}} W_j = W_3 + W_4 + W_5 + W_6 = 0.7$$

$$C = \begin{bmatrix} - & 0.7 & 0.5 & 0.6 \\ 0.3 & - & 0.3 & 0.6 \\ 0.5 & 0.7 & - & 0.8 \\ 0.7 & 0.7 & 0.2 & - \end{bmatrix}$$

$$d_{12} = \max_{j \epsilon D_{12}} |V_{1j} - V_{2j}| / \max_{j \epsilon J} |V_{1j} - V_{2j}|$$

$$= max\{0.0234, 0.0293\}/max\{0.0234, 0.0293, 0.0051, 0.0092, 0.0385, 0.0894\} =$$

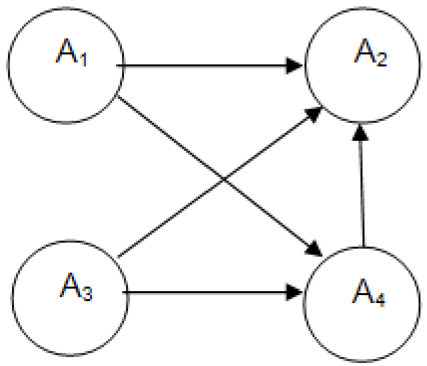
$$0.0293/0.0894 = 0.3277$$

$$D = \begin{bmatrix} - & 0.3277 & 0.3613 & 0.1051 \\ 1 & - & 1 & 1 \\ 1 & 0.4247 & - & 0.4183 \\ 1 & 0.5714 & 1 & - \end{bmatrix}$$

$$\bar{c} = {\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4} c_{kl}}\Big/_{4*3} = 0.55$$

$$\bar{d} = {\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4} d_{kl}}\Big/_{4*3} = 0.7257$$

$$e_{kl} = f_{kl} * g_{kl}$$



$$F = \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & 1 \\ 0 & - & 0 & 1 \\ 0 & 1 & - & 1 \\ 1 & 1 & 0 & - \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & 1 \\ 0 & - & 0 & 0 \\ 0 & 1 & - & 1 \\ 0 & 1 & 0 & - \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} & \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & 1 \\ 0 & - & 0 & 0 \\ 0 & 1 & - & 1 \\ 0 & 1 & 0 & - \end{bmatrix} \end{array}$$

نمی توان در مورد برتری گزینه های A_1

و A_3 نسبت به یکدیگر اظهار نظر نمود

ماتريس تصميم گيري زير را در نظر بگيريد و آن را با استفاده از روش الکتری حل کنيد.

(کتاب تصميم گيريهاي چندمعياره، تاليف محمدجواد اصغرپور)

W= {0.179, 0.062, 0.211, 0.017, 0.531}

	X1	X2	X3	X4	X5
	هزينه	استحکام	وجهه ملی	ظرفيت	سختی کار
A1	3	متوسط	بسيارزياد	2400	خيلی زياد
A2	1.2	زياد	متوسط	25000	زياد
A3	1.5	خيلی زياد	کم	32000	کم

	X1	X2	X3	X4	X5
	هزینه	استحکام	وجهه ملی	ظرفیت	سختی کار
A1	3	5	9	2400	1
A2	1.2	7	5	25000	3
A3	1.5	9	3	32000	7

$$n_{ij} = \frac{r_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3} r_{ij}^2}}$$

	X1	X2	X3	X4	X5
	هزینه	استحکام	وجهه ملی	ظرفیت	سختی کار
A1	0.842	0.402	0.839	0.509	0.130
A2	0.337	0.562	0.466	0.530	0.390
A3	0.421	0.723	0.280	0.678	0.911

V= N*W

$$V=\begin{array}{ccccc} X_1^- & X_2^+ & X_3^+ & X_4^+ & X_5^+ \\ \end{array}$$

$$V=\begin{vmatrix} 0.151 & 0.025 & 0.177 & 0.009 & 0.069 \\ 0.060 & 0.035 & 0.098 & 0.009 & 0.207 \\ 0.075 & 0.045 & 0.059 & 0.011 & 0.484 \end{vmatrix}$$

$S_{k,l} = S_{A_1,A_2} = S_{1,2} = \{3\}$

$S_{1,3} = \{3\}$

$S_{2,1} = \{1,2,4,5\}$

$S_{2,3} = \{1,3\}$

$S_{3,1} = \{1,2,4,5\}$

$S_{1,3} = \{2,4,5\}$

$D_{k,l} = D_{A_1,A_2} = D_{1,2} = \{1,2,4,5\}$

$D_{1,3} = \{1,2,4,5\}$

$D_{1,3} = \{3\}$

$D_{2,3} = \{2,4,5\}$

$D_{3,1} = \{3\}$

$D_{1,3} = \{1,3\}$

$$I_{k,l} = \sum_{j \epsilon S_{k,l}} W_j$$

W= {0.179, 0.062, 0.211, 0.017, 0.531}

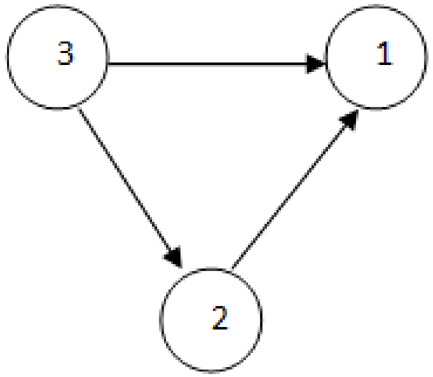
$$\left.\begin{aligned}
I_{1,2} &= \sum_{j \epsilon s_{1,2}} W_j = W_3 = 0.211 \\
I_{1,3} &= \sum_{j \epsilon s_{1,3}} W_j = W_3 = 0.211 \\
I_{2,1} &= \sum_{j \epsilon s_{2,1}} W_j = W_1 + W_2 + W_5 + W_4 = 0.789 \\
I_{2,3} &= \sum_{j \epsilon s_{2,3}} W_j = W_1 + W_3 = 0.39 \\
I_{3,1} &= \sum_{j \epsilon s_{3,1}} W_j = W_1 + W_2 + W_5 + W_4 = 0.789 \\
I_{3,2} &= \sum_{j \epsilon s_{3,2}} W_j = W_2 + W_5 + W_4 = 0.61
\end{aligned}\right\}
\quad
I = \begin{bmatrix} - & 0.211 & 0.211 \\ 0.789 & - & 0.39 \\ 0.789 & 0.61 & - \end{bmatrix}$$

$$NI_{k,l} = \frac{\max_{j\epsilon D_{k,l}} |V_{k,j} - V_{l,j}|}{\max_{j\epsilon J} |V_{k,j} - V_{l,j}|} \rightarrow NI = \begin{bmatrix} - & 1 & 1 \\ 0.572 & - & 1 \\ 0.284 & 0.141 & - \end{bmatrix}$$

$$\bar{I} = {}^{3}/_{6} = 0.5 \rightarrow F = \begin{bmatrix} - & 0 & 0 \\ 1 & - & 0 \\ 1 & 1 & - \end{bmatrix}$$

$$\bar{I} = {}^{3.997}/_{6} = 0.66 \rightarrow G = \begin{bmatrix} - & 0 & 0 \\ 1 & - & 0 \\ 1 & 1 & - \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} - & 0 & 0 \\ 1 & - & 0 \\ 1 & 1 & - \end{bmatrix}$$



$$A_3 > A_2 > A_1$$

تمرین:

در مرحله طراحی یک محصول 4 پیشنهاد با مشخصات زیر ارائه گردیده است.

الف) اگر پراکندگی بیشتر منجر به اهمیت بیشتر گردد با روش آنتروپی وزن معیارها را بدست آورید.

ب) به کمک روشهای SAW و TOPSIS و ELECTRE آلترناتیوها را رتبه بندی کنید.

شاخص / نام پیشنهاد	بسته بندی مناسب	عمر مفید	قیمت تمام شده
A	9	10	100
B	10	8	120
C	8	7	100
D	8	9	90

الف) روش آنتروپی

P_{ij}	بسته بندی مناسب	عمر مفید	قیمت تمام شده
A	0.257143	0.294118	0.243902
B	0.285714	0.235294	0.292683
C	0.228571	0.205882	0.243902
D	0.228571	0.264706	0.219512
E_j	0.996804	0.99373	0.996002
d_j	0.003196	0.00627	0.003998
W_j	0.237366	0.465706	0.296928

- روش saw

معیار سود (+)

$$r_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j^{max}}$$

معیار هزینه (-)

$$r_{ij} = \frac{X_j^{min}}{X_{ij}}$$

نرمالایز خطی	بسته بندی مناسب (+)	عمر مفید (+)	قیمت تمام شده (-)
A	0.9	1	0.9
B	1	0.8	0.75
C	0.8	0.7	0.9
D	0.8	0.9	1

W_j	0.237366	0.465706	0.296928

$$A_i = \sum_{j=1}^{n} W_j r_{1j} \qquad , \qquad i = 1,2, \dots , m$$

A	0.946571
B	0.832627
C	0.783122
D	0.905956

$$A > D > B > C$$

- روش TOPSIS

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4} x_{ij}^{2}}} \quad , \quad R = [r_{ij}]$$

قیمت تمام شده	عمر مفید	بسته بندی مناسب	R_{ij}
0.48507125	0.583211844	0.511992112	A
0.5820855	0.466569475	0.568880124	B
0.48507125	0.40824829	0.455104099	C
0.436564125	0.524890659	0.455104099	D

0.296928	0.465706	0.237366	w_j

$V_{ij} = W_j * X_{ij}$

قیمت تمام شده (-)	عمر مفید (+)	بسته بندی مناسب (+)	V_{ij}
0.144031	0.271605	0.12153	A
0.172838	0.217284	0.135033	B
0.144031	0.190123	0.108026	C
0.129628	0.244444	0.108026	D

$A^{+} = \{(max\ v_{ij} | j\epsilon J),(min\ v_{ij} | j\epsilon J')|i = 1,2,3, \ldots, m\} = \{v_1^{+}, v_2^{+}, \ldots v_n^{+}\}$

0.129628	0.271605	0.135033	A^{+}

$A^{-} = \{(min\ v_{ij} | j\epsilon J),(max\ v_{ij} | j\epsilon J')|i = 1,2,3, \ldots, m\} = \{v_1^{+}, v_2^{+}, \ldots v_n^{+}\}$

0.172838	0.190123	0.108026	A^{-}

$(i = 1,2,\ldots,m) \quad Si^{-} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(vij - vj^{-})^2} \qquad Si^{+} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(vij - vj^{+})^2}$

0.007651	S_A^-	0.00039	S_A^+
0.001467	S_B^-	0.004818	S_B^+
0.00083	S_C^-	0.007576	S_C^+
0.004818	S_D^-	0.001467	S_D^+

$$C_i = \frac{S_i^-}{S_i^- + S_i^+}$$

0.951526	C_A
0.233425	C_B
0.098717	C_C
0.766575	C_D

$$A > D > B > C$$

- روش ELECTRE

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4} x_{ij}^{2}}} \quad , \quad R = [r_{ij}]$$

قیمت تمام شده	عمر مفید	بسته بندی مناسب	R_{ij}
0.48507125	0.583211844	0.511992112	A
0.5820855	0.466569475	0.568880124	B
0.48507125	0.40824829	0.455104099	C
0.436564125	0.524890659	0.455104099	D

0.296928	0.465706	0.237366	w_j

$V_{ij} = W_j * X_{ij}$

قیمت تمام شده (-) ۳	عمر مفید (+) ۲	بسته بندی مناسب (+) ۱	V_{ij}
0.144031	0.271605	0.12153	A
0.172838	0.217284	0.135033	B
0.144031	0.190123	0.108026	C
0.129628	0.244444	0.108026	D

$C_{AB} = \{2,3\}$	$D_{AB} = \{1\}$
$C_{AC} = \{1,2,3\}$	$D_{AC} = \{\}$
$C_{AD} = \{1,2\}$	$D_{AD} = \{3\}$
$C_{BA} = \{1\}$	$D_{BA} = \{2,3\}$
$C_{BC} = \{1,2\}$	$D_{BC} = \{3\}$
$C_{BD} = \{1\}$	$D_{BD} = \{2,3\}$
$C_{CA} = \{3\}$	$D_{CA} = \{1,2\}$
$C_{CB} = \{3\}$	$D_{CB} = \{1,2\}$
$C_{CD} = \{1\}$	$D_{CD} = \{2,3\}$
$C_{DA} = \{3\}$	$D_{DA} = \{1,2\}$
$C_{DB} = \{2,3\}$	$D_{DB} = \{1\}$
$C_{DC} = \{1,2,3\}$	$D_{DC} = \{\}$

$$I_{i,k} = \sum_{j \in s_{i,k}} W_j$$

C	A	B	C	D
A	-	0.762634	1	0.703072
B	0.237366	-	0.703072	0.237366
C	0.296928	0.296928	-	0.237366
D	0.296928	0.762634	1	-

$\bar{C} =$ 0.544525

F	A	B	C	D
A	-	1	1	1
B	0	-	1	0
C	0	0	-	0
D	0	1	1	-

$$NI_{k,l} = \frac{\max\limits_{j \epsilon D_{k,l}} \left| V_{k,j} - V_{l,j} \right|}{\max\limits_{j \epsilon J} \left| V_{k,j} - V_{l,j} \right|}$$

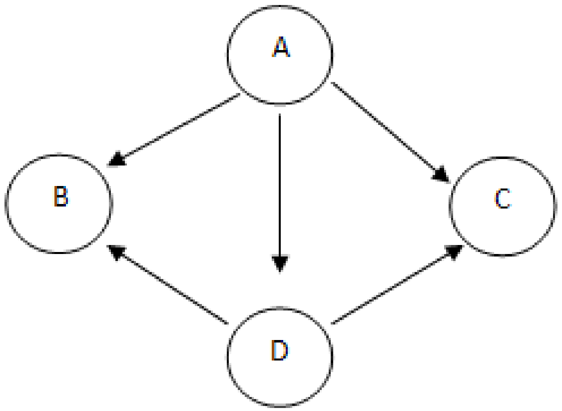
D	A	B	C	D
A	-	0.248583	0	0.530297
B	1	-	1	1
C	1	0.942868	-	1
D	1	0	0	-

$\bar{C} =$ 0.643479

G	A	B	C	D
A	-	1	1	1
B	0	-	0	0
C	0	1	-	0
D	0	1	1	-

$E = F * G$

E=F*G	A	B	C	D
A	-	1	1	1
B	0	-	0	0
C	0	0	-	0
D	0	1	1	-



A>D>B=C

منابع:

I. Multiple Attribute Decision Making ، Ching-Lai Hwang , Kwangsun Yoon
II. Management Science Multiple Attribute Decision Making By Dr.Apichat Sopadang
III. **MAUT MBSC**, The Third National Conference On Performance Management 15 -16 may 2007,Dr ezatollah Asghari zadeh

پایان

گرد آورندگان:

سالناز صمدی

الناز تاجیک

آیدا حاج نوری