irmgn.ir

# مدیریت زنجیره تامین

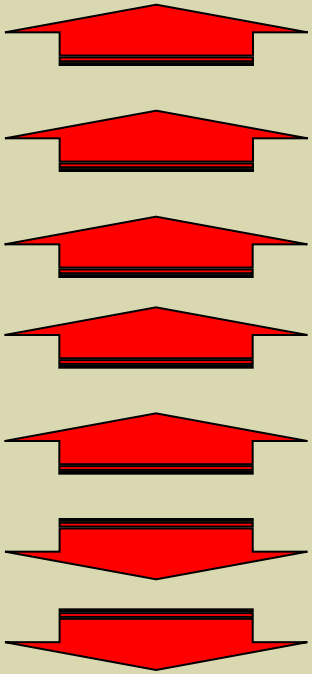
Supply Chain Management

## هماهنگی در زنجیره تامین

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

- اهمیت هماهنگی در زنجیره تامین
- اثرات عدم هماهنگی

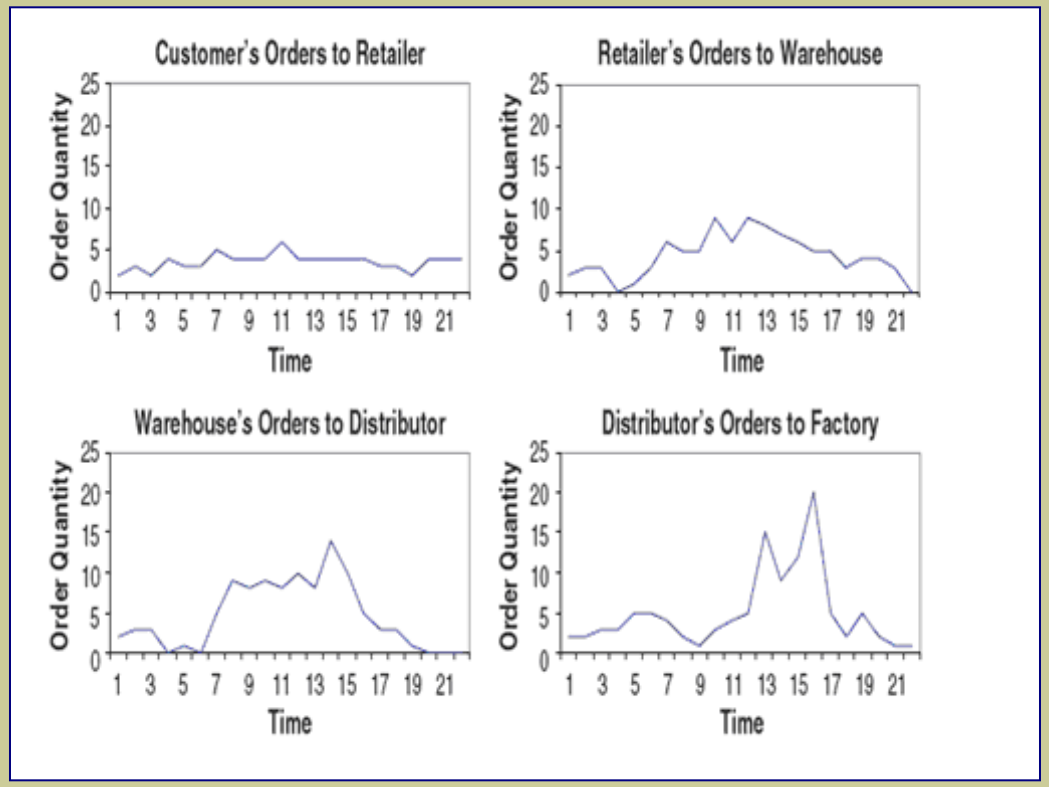


- هزینه تولید
- هزینه موجودی
- پیش زمان تحویل
- هزینه حمل و نقل
- هزینه نیروی انسانی تحویل و انبار
- سطح دسترس پذیری محصول
- سودآوری

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## اثر شلاقی در زنجیره تامین




(منبع Lee et al., 1997)

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## اثر شلاقی در زنجیره تامین

در یک زنجیره تامین ۳ مرحله ای، یک تغییر ۱۰ درصدی در تقاضا میتواند منجر به بروز تغییر ٤٠ درصدی در سفارشات مرحله سوم گردد

McCullen & Towill, 2002

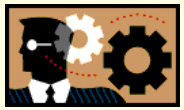
حذف اثر شلاقی می تواند منجر به افزایش سود زنجیره تامین به میزان ۱۰ تا ۳۰ درصد شود !

(McCullen & Metters, 1997 )

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## اثر شلاقی در زنجیره تامین



**مطالعات موردی**

کمپانی باریلا 1994

پروژه SNEL 2000

سیستمهای سیسکو 2001

زنجیره تامین خواربار در اسپانیا 2005

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

- مطالعات اثر شلاقی در زنجیره تامین

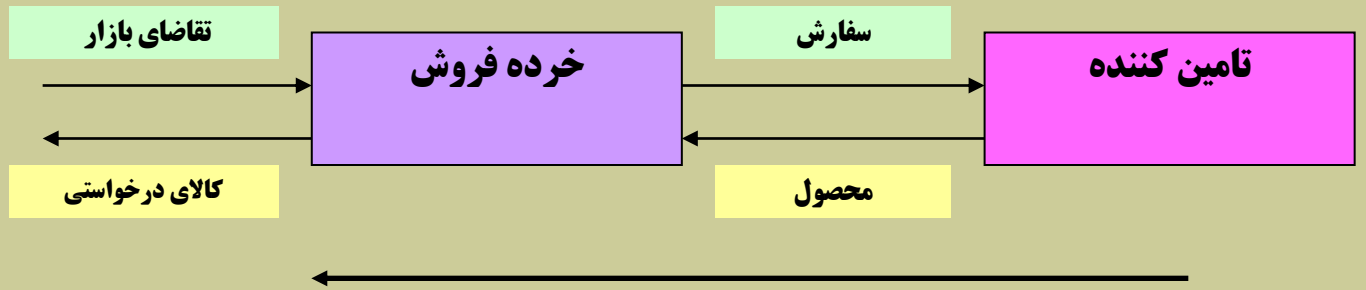
- مطالعات تحلیلی اثر شلاقی
  - تحلیل علل
  - شبیه سازی
  - طراحی آزمایشها
  - ...

- اندازه گیری اثر شلاقی
  - الگوی تقاضا
  - پیش بینی ها
  - سفارش گذاری
  - ...

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## مراحل زنجیره تامین

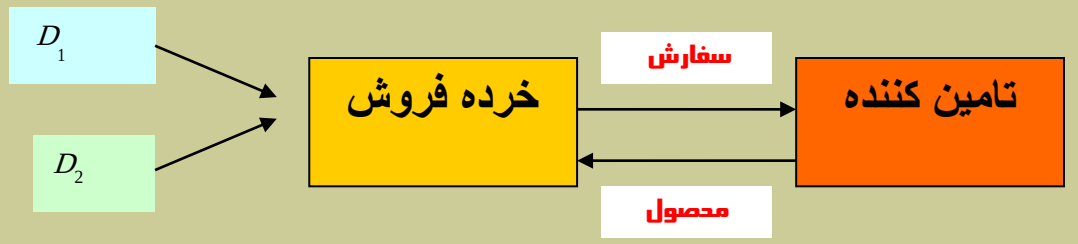



یک زنجیره تامین دو مرحله ای

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تعداد محصولات




خودروسازی

محصول اول: تویوتا کمری

محصول دوم: تویوتا کرولا

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

- **عوامل موثر در تعیین رابطه برای اندازه گیری اثر شلاقی**
  - الگوی تقاضا
  - روش سفارش گذاری
  - روش پیش بینی تقاضا در دوره پیش زمان تحویل (لیدتایم)

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## الگوی تقاضا

- وابستگی تقاضای هر محصول در هر دوره به تقاضای دوره های قبل همان محصول
- وابستگی تقاضای هر محصول به تقاضای محصول دیگر
- به عنوان مثال تقاضای تویوتا کمری در ماه جاری به تقاضای همین محصول و تقاضای تویوتا کرولا در ماه قبل بستگی دارد

**مدل سری زمانی اتورگرسیو برداری مرتبه اول**

**First Order Vector Auto Regressive: VAR(1)**

Lee et al.(2000), Chen et al.(2000a,b), Zhang(2004), Hosoda&Disney (2006), Kim et al.(2006), Chandra&Grabis (2005), Luong&Phien (2007), Gaalman&Disney (2007)

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## سیاست سفارش گذاری

رفتار عمومی خرده فروشان به این صورت است که در دوره های زمانی (مثل روز، ماه ...) موجودی خود را کنترل نموده و اقدام به سفارش گـذاری میکنند (Disney et al.2006)

**روش سفارش گذاری تا حد معین: Order Up To policy: OUT**

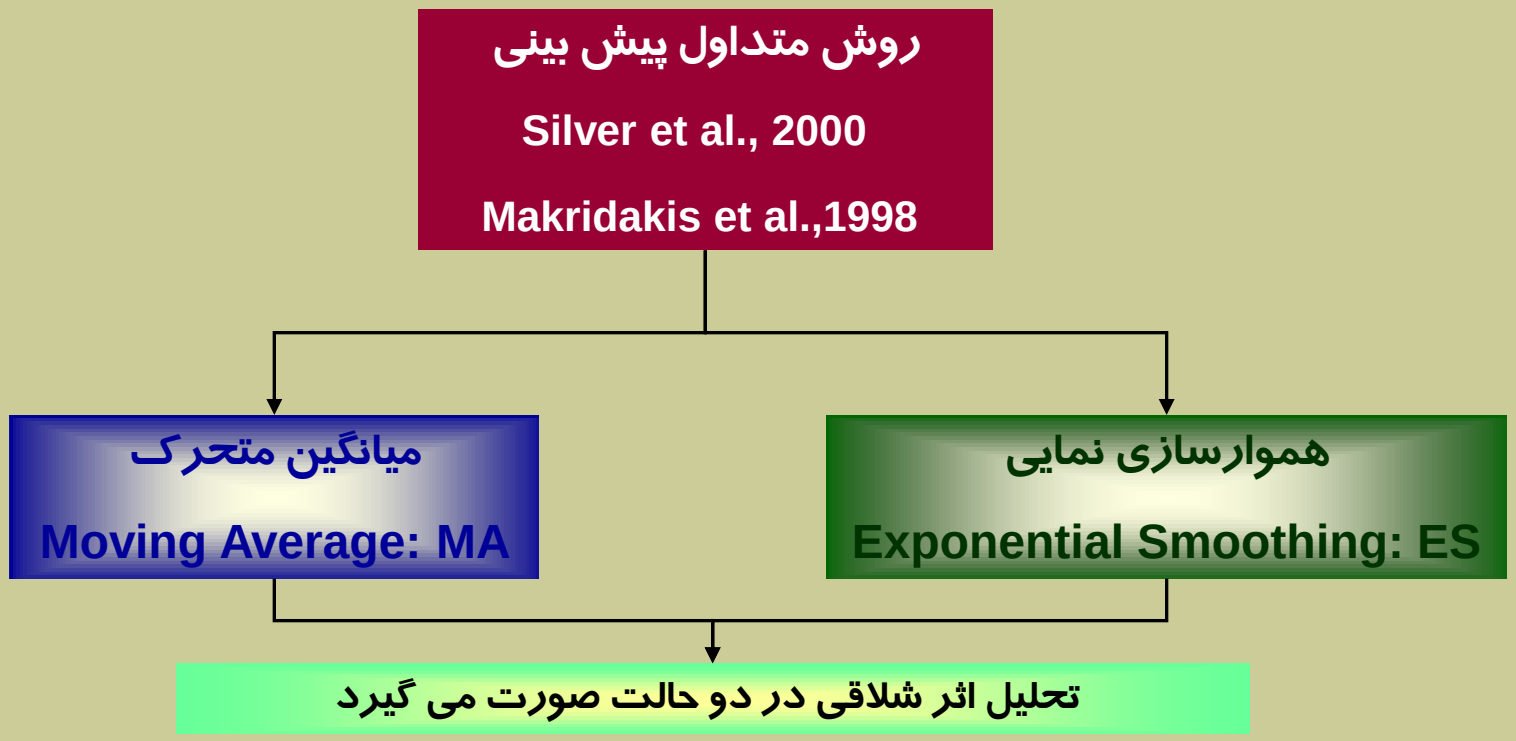
**روش استاندارد در بسیاری سیستمهای تولیدی (Gilbert, 2005)**

Lee et al.(2000), Chen et al.(2000a,b), Zhang(2004), Gilbert(2005), Hosoda&Disney (2006), Kim et al.(2006), Chandra&Grabis (2005), Luong&Phien (2007), Gaalman&Disney (2007), Luong (2007)

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

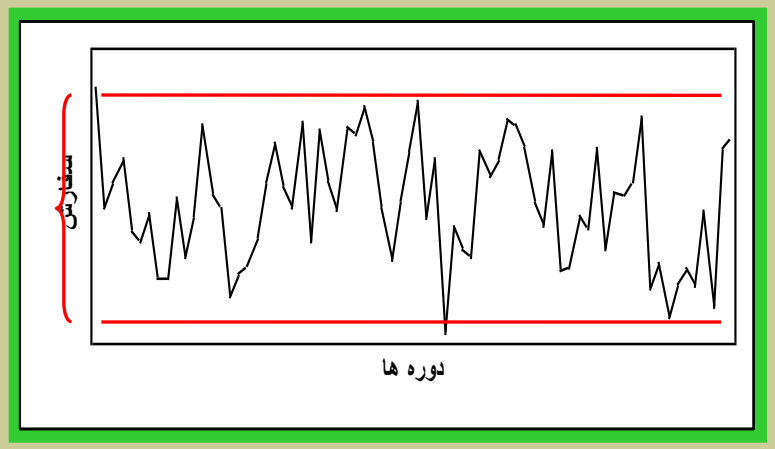
## روش پیش بینی تقاضای دوره لیدتایم



irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## مفهوم اثر شلاقی




خرده فروش ← سفارش گذاری ← تامین کننده

وجود اثر شلاقی

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

**No Measurement, No Management**

**اندازه گیری اثر شلاقی**

$$BE = \frac{Var(Q_t)}{Var(D)}$$

$$BE \succ 1$$

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تعیین واریانس تقاضا

$$BE = \frac{Var(Q_t)}{Var(D)}$$

**مدل سری زمانی اتورگرسیو برداری مرتبه اول: VAR(1)**

$$D_t = \phi_1 D_{t-1} + a_t$$

ماتریس متغ (m*1) $D_t$

ماتریس ض (m*m) $\phi_1$

ماتریس خطا (m*1) $a_t$

$$\begin{cases} D_t^1 = \phi_{11} D_{t-1}^1 + \phi_{12} D_{t-1}^2 + a_t^1 \\ D_t^2 = \phi_{21} D_{t-1}^1 + \phi_{22} D_{t-1}^2 + a_t^2 \end{cases}$$

**زنجیره تامین دومحصولی: m=2**

تویوتا کمری

تویوتا کرولا

$$D_t = \begin{bmatrix} D_t^1 \\ D_t^2 \end{bmatrix} \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \quad a_t = \begin{bmatrix} a_t^1 \\ a_t^2 \end{bmatrix}$$

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تعیین واریانس تقاضا

**ماتریس کوواریانس**

$$\Gamma(k)=\begin{cases}\Gamma(-1)\phi_1'+\Sigma & k=0\\ \Gamma(k-1)\phi_1'=\Gamma(0)(\phi_1')^k & k\geq 1\end{cases}$$

$$\Gamma(0)=\begin{bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{12} & \gamma_{22}\end{bmatrix} \qquad \Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{12} & \gamma_{22}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\phi_{11} & \phi_{12}\\ \phi_{21} & \phi_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{12} & \gamma_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{11} & \phi_{21}\\ \phi_{12} & \phi_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1-\phi_{11}^2 & -2\phi_{11}\phi_{12} & -\phi_{12}^2\\ -\phi_{11}\phi_{21} & 1-\phi_{11}\phi_{22}-\phi_{12}\phi_{21} & -\phi_{12}\phi_{22}\\ -\phi_{21}^2 & -2\phi_{21}\phi_{22} & 1-\phi_{22}^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_{11}\\ \gamma_{12}\\ \gamma_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{22}\end{bmatrix}$$

- $\gamma_{11}$ واریانس تقاضای کمری
- $\gamma_{22}$ واریانس تقاضای کرولا
- $\gamma_{12}$ کوواریانس بین تقاضای دو محصول

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تعیین واریانس تقاضا

$$\gamma_{11}=\frac{\left(\begin{array}{l}\sigma_{11}\left((1-\phi_{11}\phi_{22})(1-\phi_{22}^2)-\phi_{12}\phi_{21}(1+\phi_{22}^2)\right)+\\ 2\phi_{12}\sigma_{12}\left(\phi_{11}(1-\phi_{22}^2)+\phi_{12}\phi_{21}\phi_{22}\right)+\phi_{12}^2\sigma_{22}(1-\phi_{12}\phi_{21}+\phi_{11}\phi_{22})\end{array}\right)}{1+(\phi_{11}\phi_{22}-\phi_{12}\phi_{21}-1)(\phi_{11}\phi_{22}+\phi_{12}\phi_{21}+\phi_{11}^2+\phi_{22}^2)+(\phi_{12}\phi_{21}-\phi_{11}\phi_{22})^3}$$

واریانس تقاضای تویوتا کمری

$$\gamma_{22}=\frac{\left(\begin{array}{l}\phi_{21}^2\sigma_{11}[1+\phi_{11}\phi_{22}-\phi_{12}\phi_{21}]+2\phi_{21}\sigma_{12}[\phi_{22}(1-\phi_{11}^2)+\phi_{11}\phi_{12}\phi_{21}]\\ +\sigma_{22}[(1-\phi_{11}\phi_{22})(1-\phi_{11}^2)-\phi_{12}\phi_{21}(1+\phi_{11}^2)]\end{array}\right)}{1+(\phi_{11}\phi_{22}-\phi_{12}\phi_{21}-1)(\phi_{11}\phi_{22}+\phi_{12}\phi_{21}+\phi_{11}^2+\phi_{22}^2)+(\phi_{12}\phi_{21}-\phi_{11}\phi_{22})^3}$$

واریانس تقاضای تویوتا کرولا

$$\gamma_{12}=\frac{\left(\begin{array}{l}\phi_{21}\sigma_{11}[\phi_{11}(1-\phi_{22}^2)+\phi_{12}\phi_{21}\phi_{22}]+\\ \sigma_{12}[(1-\phi_{11}^2)(1-\phi_{22}^2)-\phi_{12}^2\phi_{21}^2]+\phi_{12}\sigma_{22}[\phi_{22}(1-\phi_{11}^2)+\phi_{11}\phi_{12}\phi_{21}]\end{array}\right)}{1+(\phi_{11}\phi_{22}-\phi_{12}\phi_{21}-1)(\phi_{11}\phi_{22}+\phi_{12}\phi_{21}+\phi_{11}^2+\phi_{22}^2)+(\phi_{12}\phi_{21}-\phi_{11}\phi_{22})^3}$$

کوواریانس بین دو تقاضا

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## سیاست سفارش گذاری

**(Zipkin,2000)**

**Order Up To Policy: OUT**

b هزینه کمبود واحد محصول

h هزینه نگهداری واحد محصول

$$Q_t = S_t - S_{t-1} + D_{t-1}$$

$$S_t = \hat{D}_t^L + z\hat{\sigma}_t^L$$

$$z = \phi^{-1}\left(\frac{b}{h+b}\right)$$

$\hat{D}_t^L$ برآورد تقاضای لیدتایم

$\hat{\sigma}_t^L$ برآورد انحراف معیار خطای پیش بینی تقاضای دوره لیدتایم

z سطح سرویس دهی به مشتری (از جدول نرمال استاندارد)

$$Q_t = \hat{D}_t^L - \hat{D}_{t-1}^L + z(\hat{\sigma}_t^L - \hat{\sigma}_{t-1}^L) + D_{t-1}$$

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

پیش بینی تقاضای خرده فروش در دوره لید تایم

$$Q_t = \hat{D}_t^L - \hat{D}_{t-1}^L + z(\hat{\sigma}_t^L - \hat{\sigma}_{t-1}^L) + D_{t-1}$$

$$\hat{D}_t = \frac{\sum_{i=1}^{p} D_{t-i}}{p}$$

$$\hat{D}_t = \alpha D_{t-1} + (1-\alpha)\hat{D}_{t-1}$$

روش پیش بینی

- میانگین متحرک
- هموارسازی نمایی

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## پیش بینی به روش میانگین متحرک

$$Q_t = \hat{D}_t^L - \hat{D}_{t-1}^L + z(\hat{\sigma}_t^L - \hat{\sigma}_{t-1}^L) + D_{t-1}$$

0

اثبات می شود:

$$\left(\hat{\sigma}_t^L\right)^2 = L\gamma + 2\sum_{i=1}^{L-1}(L-i)\gamma(i) + (\frac{L}{p})[L\gamma - 2[\gamma(1) - [(\frac{L}{p})\sum_{i=1}^{p-1}(p-i)\gamma(i) + \sum_{i=2}^{L+p-1}\gamma(i)]]]$$

$$Q_t = \hat{D}_t^L - \hat{D}_{t-1}^L + D_{t-1}$$

$$\hat{\sigma}_t^L = \hat{\sigma}_{t-1}^L$$

$$Q_t = (1+\frac{L}{p})D_{t-1} - (\frac{L}{p})D_{t-p-1}$$

$$Var(Q_t) = (1+\frac{L}{p})^2\gamma + (\frac{L}{p})^2\gamma - 2(1+\frac{L}{p})(\frac{L}{p})\gamma(p)$$

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

**تعیین رابطه برای اندازه گیری اثر شلاقی (پیش بینی میانگین متحرک)**

$$BE = \frac{Var(Q_t)}{Var(D)}$$

$$BE = 1 + 2\left(\frac{L}{p}\right)\left(1 + \frac{L}{p}\right)\left(1 - \frac{\gamma(p)}{\gamma}\right)$$

کمری

$$\Gamma(k) = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(k) & \gamma_{12}(k) \\ \gamma_{12}(k) & \gamma_{22}(k) \end{bmatrix}$$

کرولا

$$\Gamma(k) = \begin{cases} \Gamma(-1)\phi_1' + \Sigma & k = 0 \\ \Gamma(k-1)\phi_1' = \Gamma(0)(\phi_1')^k & k \geq 1 \end{cases}$$

$$\Gamma(k) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} \\ \phi_{12} & \phi_{22} \end{bmatrix}^k$$

$$k = 1,2,3,4,5$$

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

محصول اول
تویوتا کمری

## تعیین رابطه برای اندازه گیری اثر شلاقی (پیش بینی میانگین متحرک)

$$BE_1^1 = 1 + 2L_1(1+L_1)\left(1 - \phi_{11} - \phi_{12}\left(\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}}\right)\left(\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}}\right)\right)$$

$$BE_2^1 = 1 + L_1\left(1+\frac{L_1}{2}\right)\left(1 - (\phi_{11}^2 + \phi_{21}\phi_{12}) - \phi_{12}(\phi_{11}+\phi_{22})\left(\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}}\right)\right)$$

$$BE_3^1 = 1 + 2\left(\frac{L_1}{3}\right)\left(1+\frac{L_1}{3}\right)\begin{pmatrix}1 - (\phi_{11}^3 + \phi_{21}\phi_{12}(2\phi_{11}+\phi_{22})) \\ -\phi_{12}(\phi_{11}^2 + \phi_{11}\phi_{22} + \phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2)\left(\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}}\right)\end{pmatrix}$$

$$BE_4^1 = 1 + \left(\frac{L_1}{2}\right)\left(1+\frac{L_1}{4}\right)\begin{pmatrix}1 - (\phi_{11}^4 + \phi_{11}\phi_{21}\phi_{12}(3\phi_{11}+2\phi_{22}) + \phi_{21}\phi_{12}(\phi_{21}\phi_{12}+\phi_{22}^2)) \\ -\phi_{12}(\phi_{11}+\phi_{22})(\phi_{11}^2 + 2\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2)\left(\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}}\right)\left(\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}}\right)\end{pmatrix}$$

$$BE_5^1 = 1 + 2\left(\frac{L_1}{5}\right)\left(1+\frac{L_1}{5}\right)\begin{pmatrix}1 - (\phi_{11}^5 + \phi_{21}\phi_{12}(4\phi_{11}^3 + (\phi_{11}\phi_{22}+\phi_{21}\phi_{12})(3\phi_{11}+2\phi_{22}) + \phi_{22}^3)) - \\ \phi_{12}\begin{pmatrix}\phi_{22}(\phi_{11}+\phi_{22})(\phi_{11}^2 + 2\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2) + \\ \phi_{21}\phi_{12}(\phi_{11}(3\phi_{11}+2\phi_{22}) + (\phi_{21}\phi_{12}+\phi_{22}^2)) + \phi_{11}^3\end{pmatrix}\left(\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}}\right)\end{pmatrix}$$

$$\gamma_{11} = \frac{\begin{pmatrix}\sigma_{11}((1-\phi_{11}\phi_{22})(1-\phi_{22}^2) - \phi_{12}\phi_{21}(1+\phi_{22}^2)) + \\ 2\phi_{12}\sigma_{12}(\phi_{11}(1-\phi_{22}^2) + \phi_{12}\phi_{21}\phi_{22}) + \phi_{12}^2\sigma_{22}(1-\phi_{12}\phi_{21}+\phi_{11}\phi_{22})\end{pmatrix}}{1 + (\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21} - 1)(\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{12}\phi_{21} + \phi_{11}^2 + \phi_{22}^2) + (\phi_{12}\phi_{21} - \phi_{11}\phi_{22})^3}$$

$$\gamma_{12} = \frac{\begin{pmatrix}\phi_{21}\sigma_{11}[\phi_{11}(1-\phi_{22}^2) + \phi_{12}\phi_{21}\phi_{22}] + \\ \sigma_{12}[(1-\phi_{11}^2)(1-\phi_{22}^2) - \phi_{12}^2\phi_{21}^2] + \phi_{12}\sigma_{22}[\phi_{22}(1-\phi_{11}^2) + \phi_{11}\phi_{12}\phi_{21}]\end{pmatrix}}{1 + (\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21} - 1)(\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{12}\phi_{21} + \phi_{11}^2 + \phi_{22}^2) + (\phi_{12}\phi_{21} - \phi_{11}\phi_{22})^3}$$

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تعمیم به m محصول

دو محصول m=2

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}$$

$$\phi_1 \equiv \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdot & \cdot & \phi_{1m} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdot & \cdot & \phi_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \phi_{m1} & \phi_{m2} & \cdot & \cdot & \phi_{mm} \end{bmatrix}$$

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تعمیم به m محصول

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & . & . & \gamma_{1m} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & . & . & \gamma_{2m} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \gamma_{1m} & \gamma_{2m} & . & . & \gamma_{mm} \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\phi_{1j}\phi_{1i}\gamma_{ij} & \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\phi_{2j}\phi_{1i}\gamma_{ij} & . & . & \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\phi_{mj}\phi_{1i}\gamma_{ij} \\ \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\phi_{1j}\phi_{2i}\gamma_{ij} & \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\phi_{2j}\phi_{2i}\gamma_{ij} & . & . & \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\phi_{mj}\phi_{2i}\gamma_{ij} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\phi_{1j}\phi_{mi}\gamma_{ij} & \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\phi_{2j}\phi_{mi}\gamma_{ij} & . & . & \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\phi_{mj}\phi_{mi}\gamma_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & . & . & \sigma_{1m} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & . & . & \sigma_{2m} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \sigma_{1m} & \sigma_{2m} & . & . & \sigma_{mm} \end{bmatrix}$$

تعیین واریانس تقاضا و کوواریانس بین تقاضاها

$$\Gamma(0) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & . & . & \gamma_{1m} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & . & . & \gamma_{2m} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & . & . & \gamma_{mm} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma(k) = \begin{cases} \Gamma(-1)\phi_1' + \Sigma \\ \Gamma(k-1)\phi_1' = \Gamma(0)(\phi_1')^k \end{cases}$$

$$\phi_1'^k = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & . & . & \phi_{1m} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & . & . & \phi_{2m} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \phi_{m1} & \phi_{m2} & . & . & \phi_{mm} \end{bmatrix}^k$$

$$\gamma_{ii}(k)$$

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تعمیم به m محصول

اثر شلاقی محصول i ام

$$BE^{i}_{p_i} = 1 + 2\left(\frac{L_i}{p_i}\right)\left(1 + \frac{L_i}{p_i}\right)\left(1 - \frac{\gamma_{ii}(p_i)}{\gamma_{ii}}\right) \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تعیین رابطه برای اندازه گیری اثر شلاقی (پیش بینی هموارسازی نمایی)

$$\hat{D}_t = \alpha D_{t-1} + (1-\alpha)\hat{D}_{t-1}$$

پیش بینی به روش هموار سازی نمایی

$$\hat{\sigma}_t^L = \hat{\sigma}_{t-1}^L$$

$$Q_t = \hat{D}_t^L - \hat{D}_{t-1}^L + D_{t-1}$$

$$Q_t = (1+\alpha L)D_{t-1} - \alpha L\left[\alpha\sum_{i=0}^{\infty}(1-\alpha)^i D_{t-i-2}\right]$$

$$Var(Q_t) = Var\left[(1+\alpha L)D_{t-1} - \alpha L\left[\alpha\sum_{i=0}^{\infty}(1-\alpha)^i D_{t-i-2}\right]\right]$$

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

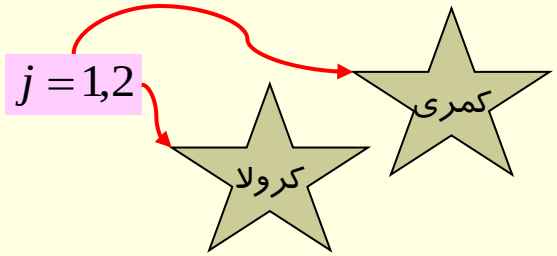
## تعیین رابطه برای اندازه گیری اثر شلاقی (پیش بینی هموارسازی نمایی)

$$Var(Q_t)=\begin{pmatrix}\gamma\left((1+\alpha L)^2+\frac{\alpha^3L^2}{2-\alpha}\right)+\left(\frac{2\alpha^3L^2}{2-\alpha}\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty}(1-\alpha)^i\gamma(i)\right)\\-2\alpha^2L(1+\alpha L)\sum_{i=0}^{\infty}(1-\alpha)^i\gamma(i+1)\end{pmatrix}$$

$$BE=\frac{Var(Q_t)}{Var(D)}$$

$$BE_j=(1+\alpha_jL_j)^2+\frac{\alpha_j^3L_j^2}{2-\alpha_j}+\frac{\begin{pmatrix}\left(\frac{2\alpha_j^3L_j^2}{2-\alpha_j}\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty}(1-\alpha_j)^i\gamma_{jj}(i)\right)\\-2\alpha_j^2L_j(1+\alpha_jL_j)\sum_{i=0}^{\infty}(1-\alpha_j)^i\gamma_{jj}(i+1)\end{pmatrix}}{\gamma_{jj}}$$

اثر شلاقی هر یک از محصولات



irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تعیین رابطه برای اندازه گیری اثر شلاقی (پیش بینی هموارسازی نمایی)

$$BE_1 = (1+\alpha_1 L_1)^2 + \frac{\alpha_1^3 L_1^2}{2-\alpha_1} + \frac{\left(\left(\frac{2\alpha_1^3 L_1^2}{2-\alpha_1}\right)\left((1-\alpha_1)\gamma_{11}(1)+(1-\alpha_1)^2\gamma_{11}(2)+(1-\alpha_1)^3\gamma_{11}(3)+(1-\alpha_1)^4\gamma_{11}(4)+(1-\alpha_1)^5\gamma_{11}(5)\right)-2\alpha_1^2 L_1(1+\alpha_1 L_1)\left(\gamma_{11}(1)+(1-\alpha_1)\gamma_{11}(2)+(1-\alpha_1)^2\gamma_{11}(3)+(1-\alpha_1)^3\gamma_{11}(4)+(1-\alpha_1)^4\gamma_{11}(5)\right)\right)}{\gamma_{11}}$$

اثر شلاقی
تویوتا کمری

$$BE_2 = (1+\alpha_2 L_2)^2 + \frac{\alpha_2^3 L_2^2}{2-\alpha_2} + \frac{\left(\left(\frac{2\alpha_2^3 L_2^2}{2-\alpha_2}\right)\left((1-\alpha_2)\gamma_{22}(1)+(1-\alpha_2)^2\gamma_{22}(2)+(1-\alpha_2)^3\gamma_{22}(3)+(1-\alpha_2)^4\gamma_{22}(4)+(1-\alpha_2)^5\gamma_{22}(5)\right)-2\alpha_2^2 L_2(1+\alpha_2 L_2)\left(\gamma_{22}(1)+(1-\alpha_2)\gamma_{22}(2)+(1-\alpha_2)^2\gamma_{22}(3)+(1-\alpha_2)^3\gamma_{22}(4)+(1-\alpha_2)^4\gamma_{22}(5)\right)\right)}{\gamma_{22}}$$

اثر شلاقی
تویوتا کرولا

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تحلیل عددی

**زنجیره تامین دو محصولی که تقاضای محصولات در آن از الگوی زیر پیروی می کند در نظر گرفته می شود:**

$$\begin{cases} D_t^1 = 0.7D_{t-1}^1 + 0.6D_{t-1}^2 \\ D_t^2 = 0.2D_{t-1}^1 + 0.5D_{t-1}^2 \end{cases}$$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\left| \frac{(\phi_{11}+\phi_{22}) \pm \sqrt{(\phi_{11}-\phi_{22})^2 + 4\phi_{12}\phi_{21}}}{2} \right| \prec 1$$

**شرایط ایستایی**

$$\left| \frac{(0.7+0.5) + \sqrt{(0.7-0.5)^2 + 4(0.6)(0.2)}}{2} \right| = 0.96$$

$$\left| \frac{(0.7+0.5) - \sqrt{(0.7-0.5)^2 + 4(0.6)(0.2)}}{2} \right| = 0.23$$

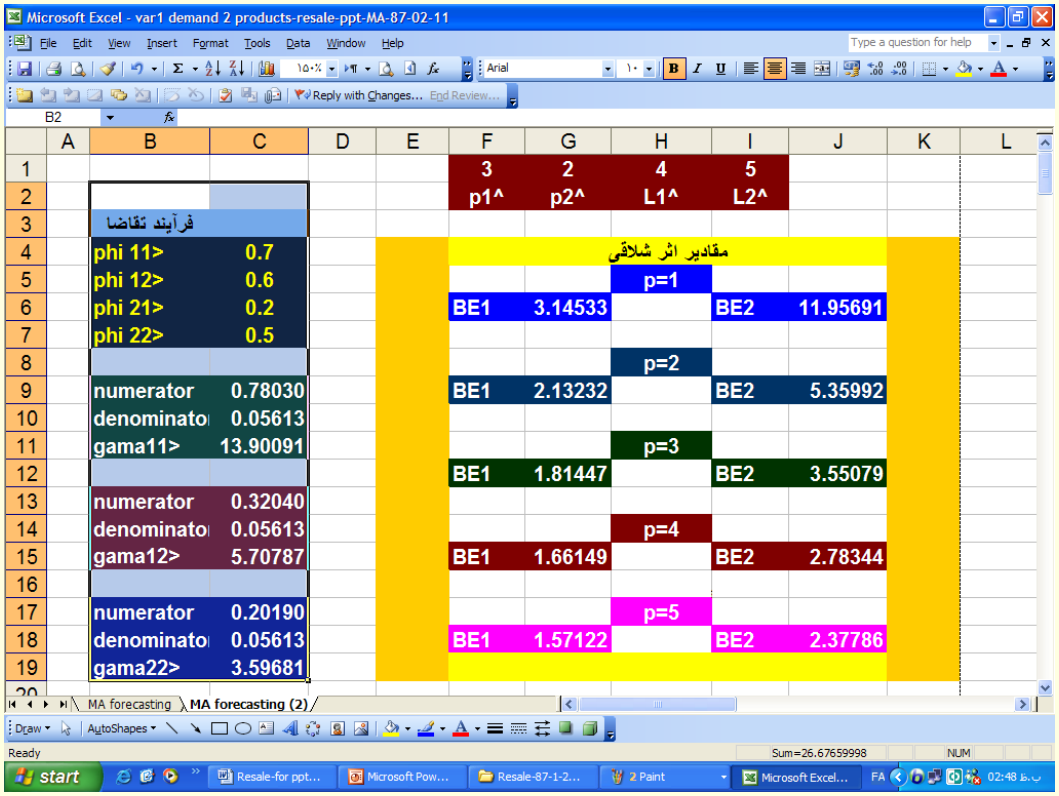
**الگوی تقاضا ایستا است**

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تحلیل عددی

### تحلیل پیش بینی میانگین متحرک

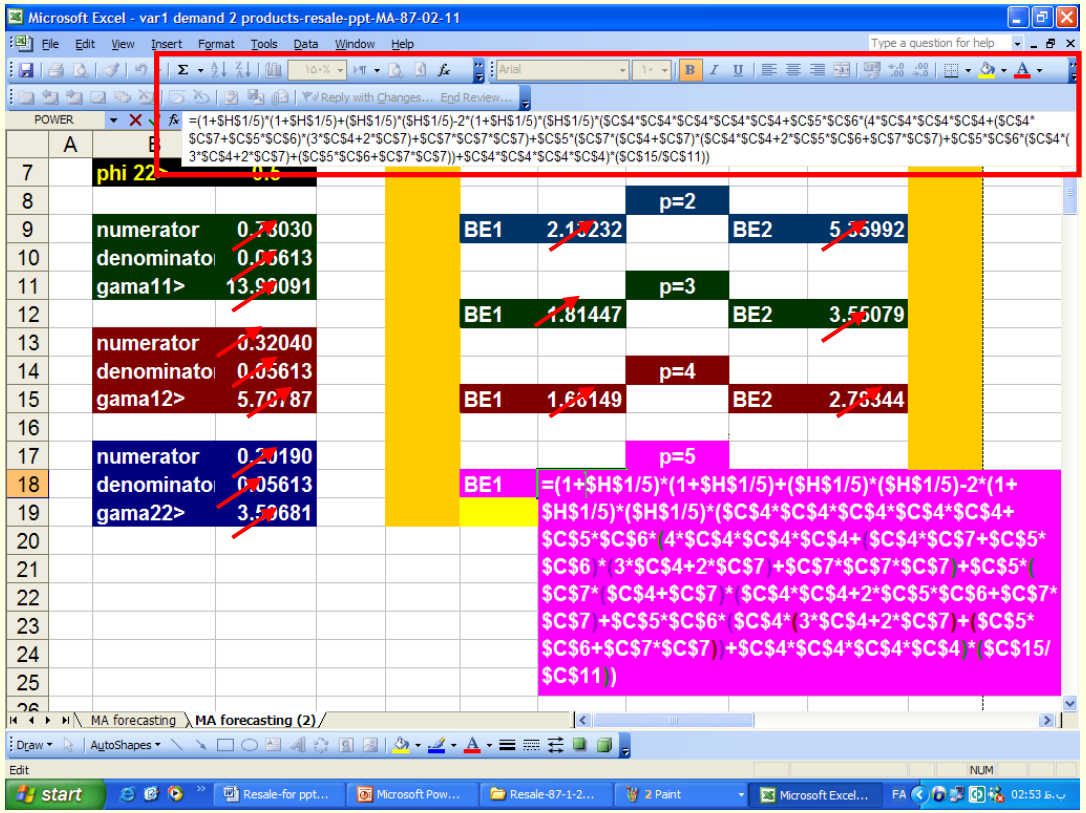


irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تحلیل عددی

### تحلیل پیش بینی میانگین متحرک



irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تحلیل عددی

- تحلیل پیش بینی میانگین متحرک

**مقادیر اثر شلاقی محصول اول (تویوتا کمری)**

| | | p1 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| L1 | 1 | 1.2145 | 1.1415 | 1.1163 | 1.1033 | 1.0952 |
| | 2 | 1.6436 | 1.3774 | 1.2908 | 1.2481 | 1.2221 |
| | 3 | 2.2872 | 1.7077 | 1.5235 | 1.4341 | 1.3808 |
| | 4 | 3.1453 | 2.1323 | 1.8144 | 1.6614 | 1.5712 |
| | 5 | 4.2179 | 2.6513 | 2.1635 | 1.9302 | 1.7933 |
| | 6 | 5.5051 | 3.2646 | 2.5707 | 2.2402 | 2.0472 |

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تحلیل عددی

- تحلیل پیش بینی میانگین متحرک

| | | مقادیر اثر شلاقی محصول دوم (تویوتا کرولا) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | p2 | | | | |
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| L2 | 1 | 1.7304 | 1.3737 | 1.2551 | 1.1981 | 1.1653 |
| | 2 | 3.1913 | 1.9965 | 1.6377 | 1.4755 | 1.3858 |
| | 3 | 5.3827 | 2.8685 | 2.1478 | 1.8322 | 1.6613 |
| | 4 | 8.3046 | 3.9896 | 2.7855 | 2.2682 | 1.9921 |
| | 5 | 11.956 | 5.3599 | 3.5507 | 2.7834 | 2.3778 |
| | 6 | 16.339 | 6.9793 | 4.4435 | 3.3779 | 2.8187 |

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

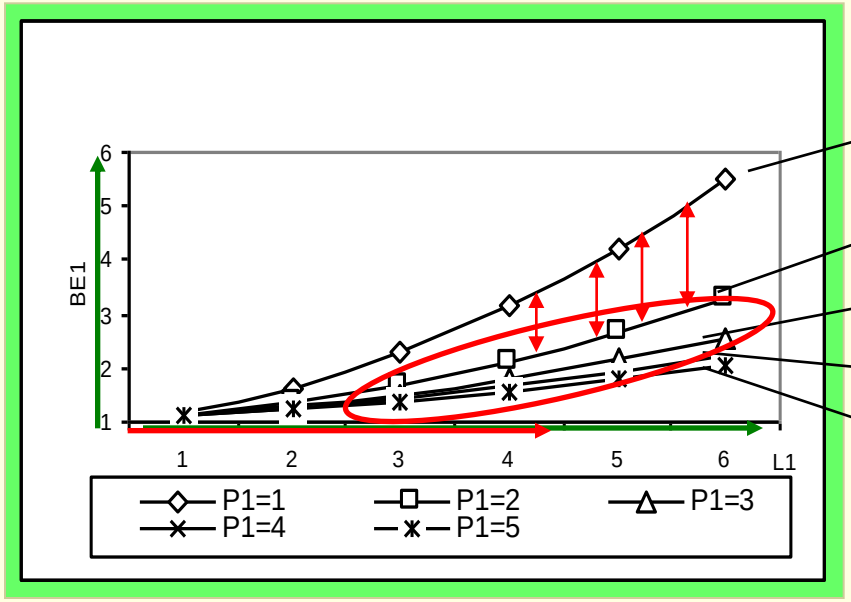
## تحلیل عددی

- تحلیل پیش بینی میانگین متحرک

**تغییرات اثر شلاقی محصول اول (تویوتا کمری) نسبت به لیدتایم**

اثر شلاقی با لیدتایم نسبت مستقیم دارد

با افزایش لیدتایم تاثیر تعداد دوره های مورد استفاده در پیش بینی میانگین متحرک در مقدار اثر شلاقی افزایش می یابد به گونه ای که افزایش تعداد دوره ها از ۱ به ۲ منجر به کاهش تقریبا ۵۰ درصدی در مقدار اثر شلاقی می شود. این مقدار بهبود برای سایر مقادیر p کمتر است.



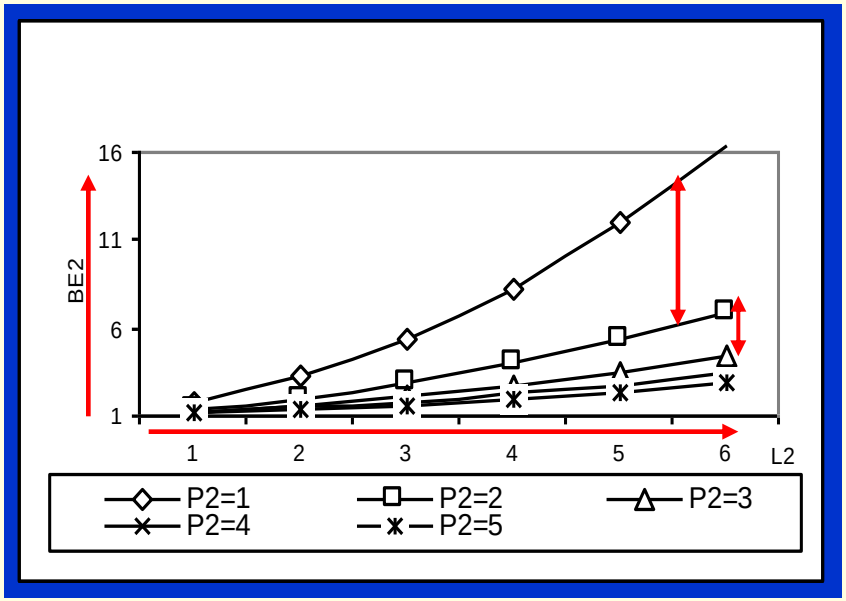
irmgn.ir

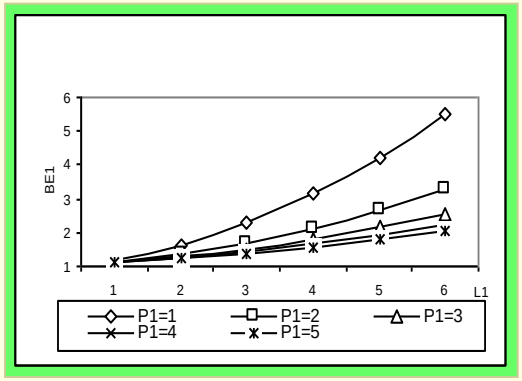
# هماهنگی در زنجیره تامین

## تحلیل عددی

- تحلیل پیش بینی میانگین متحرک

**تغییرات اثر شلاقی محصول دوم (تویوتا کرولا) نسبت به لیدتایم**



irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

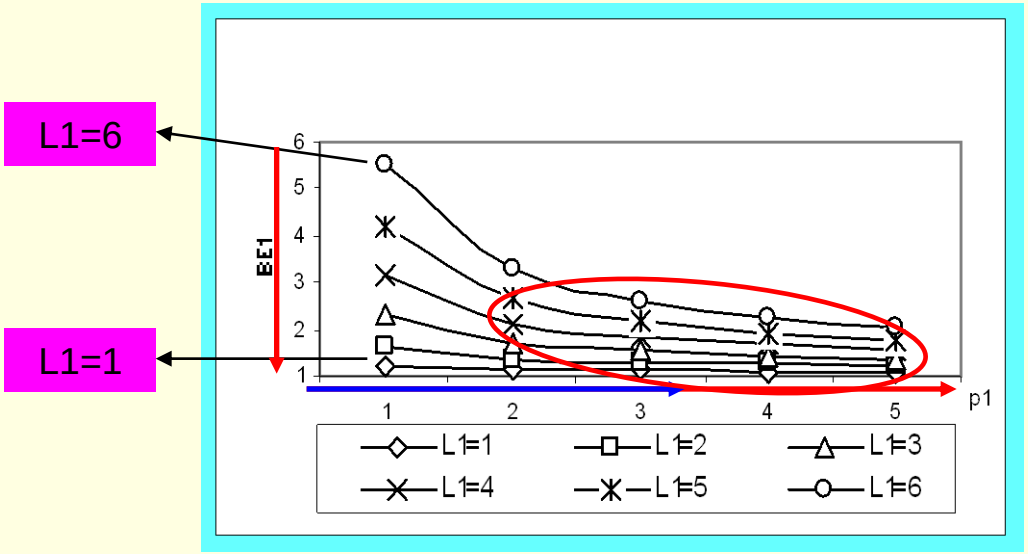
## تحلیل عددی

- تحلیل پیش بینی میانگین متحرک

**تغییرات اثر شلاقی محصول اول (تویوتا کمری) نسبت به تعداد دوره ها**

اثر شلاقی با تعداد دوره های مورد استفاده در پیش بینی میانگین متحرک نسبت معکوس دارد

با افزایش تعداد دوره های مورد استفاده در پیش بینی میانگین متحرک تاثیر لیدتایم در مقدار اثر شلاقی کاهش می یابد به گونه ای که در شرایط استفاده از دوره های زیاد در پیش بینی، حساسیت لیدتایم کاهش چشمگیر از خود نشان می دهد.



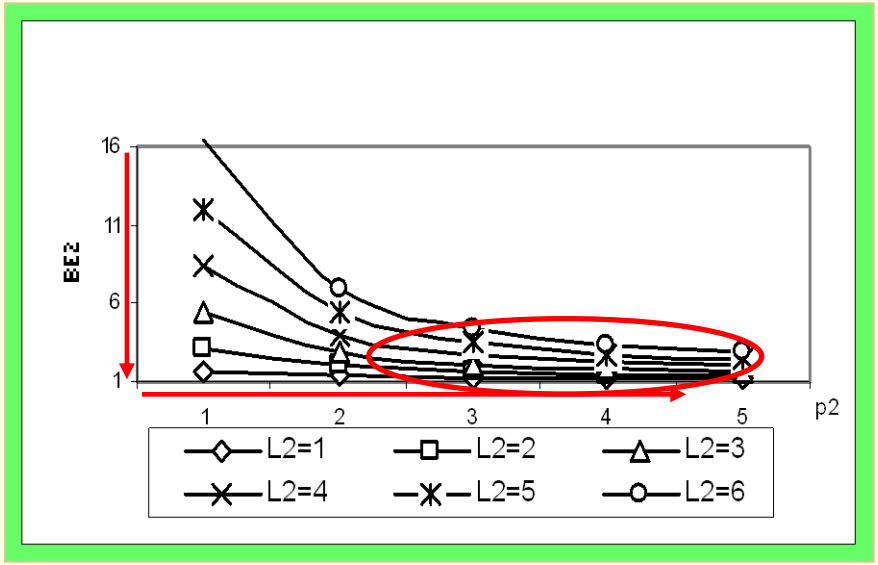
irmgn.ir

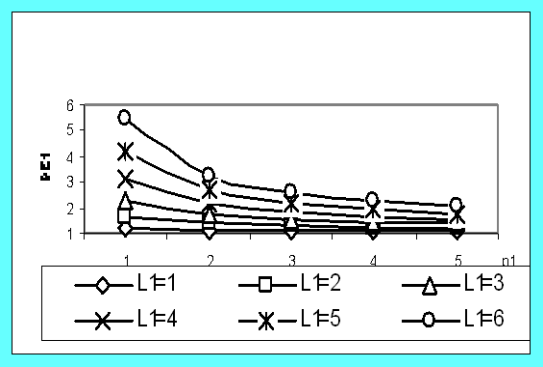
# هماهنگی در زنجیره تامین

## تحلیل عددی

- تحلیل پیش بینی میانگین متحرک

**تغییرات اثر شلاقی محصول دوم (تویوتا کرولا) نسبت به نسبت به تعداد دوره ها**



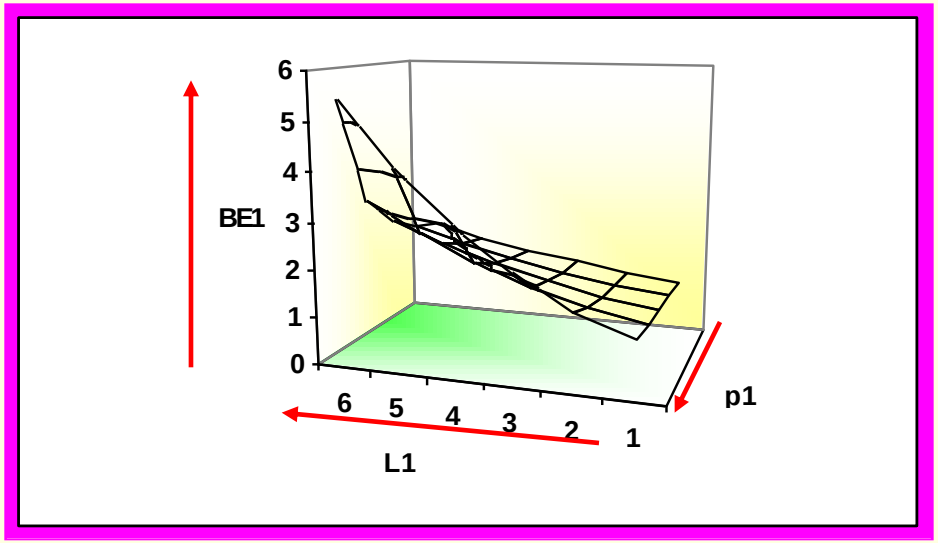
irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تحلیل عددی

- تحلیل پیش بینی میانگین متحرک

**تغییرات همزمان لیدتایم و تعداد دوره ها- محصول اول- تویوتا کمری**




**افزایش تعداد دوره های پیش بینی و کاهش تعداد دوره های مورد استفاده در پیش بینی میانگین متحرک (بصورت همزمان) منجر به کاهش اثر شلاقی می شود**

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تحلیل عددی

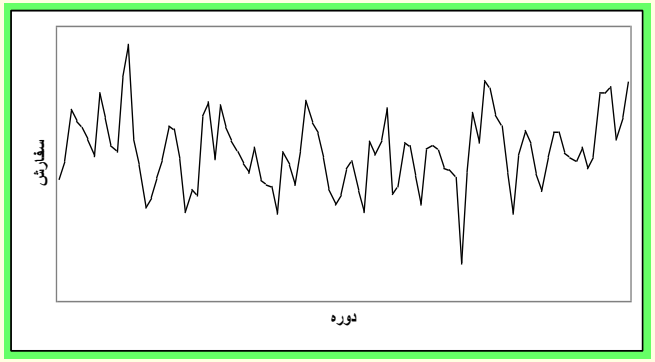
- تحلیل پیش بینی میانگین متحرک

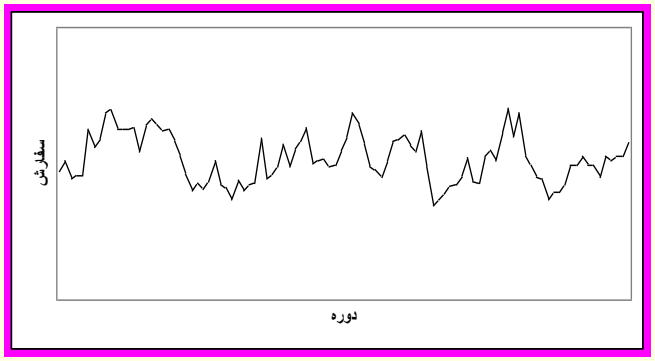
**مدیریت اثر شلاقی و انتخاب p و L**

$\begin{cases} p_1 = 2 \\ L_1 = 5 \end{cases}$ ⇒ $BE_1 = 2.65$

هزینه

$\begin{cases} p_1 = 5 \\ L_1 = 3 \end{cases}$ ⇒ $BE_1 = 1.38$




خرده فروش و تامین کننده در یک تعامل می توانند از طریق بررسی منافع حاصله از کاهش اثر شلاقی نسبت به تغییر پارمترها اقدام و سود زنجیره تامین را افزایش دهند

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تحلیل عددی

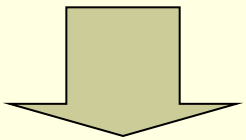
- تحلیل پیش بینی میانگین متحرک

**مدیریت اثر شلاقی و انتخاب p و L**

| p1 | L1 | BE1 |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 1.64 |
| 4 | 4 | 1.66 |

**خرده فروش با افزایش تعداد دوره ها در محاسبات پیش بینی خود، میتوانـد تـاثیر افزایش لیدتایم را از اثر شلاقی حذف کند**

**تعیین خطوط همتراز**



irmgn.ir

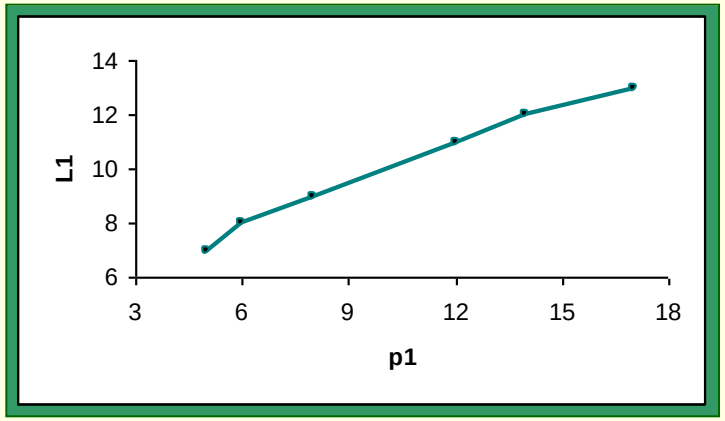
# هماهنگی در زنجیره تامین

## تحلیل عددی

- تحلیل پیش بینی میانگین متحرک

**مدیریت اثر شلاقی و انتخاب p و L**

| p1 | L1 | BE1 |
|---|---|---|
| 5 | 7 | 2.38 |
| 6 | 8 | 2.43 |
| 8 | 9 | 2.33 |
| 10 | 10 | 2.38 |
| 12 | 11 | 2.38 |
| 14 | 12 | 2.40 |
| 17 | 13 | 2.36 |




$BE_1 \approx 2.4$

**به منظور مدیریت و کنترل اثر شلاقی می توان با استفاده از خطوط همتراز، ترکیبات مختلف لیدتایم و تعداد دوره های پیش بینی را انتخاب کرد**

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

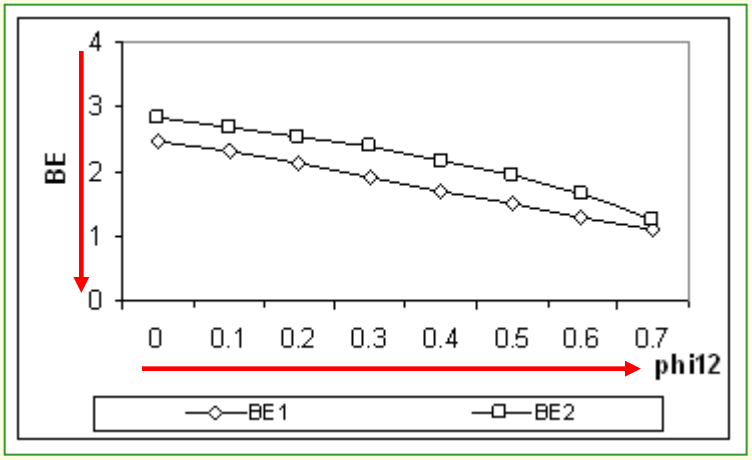
## تحلیل عددی

- تحلیل پیش بینی میانگین متحرک

**اثر شلاقی و مدیریت بازار**

میزان ارتباط تقاضای تویوتا کمری در ماه جاری به تقاضای ماه قبل تویوتا کرولا

$$-0.05 \prec \phi_{12} \prec 0.75$$



irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

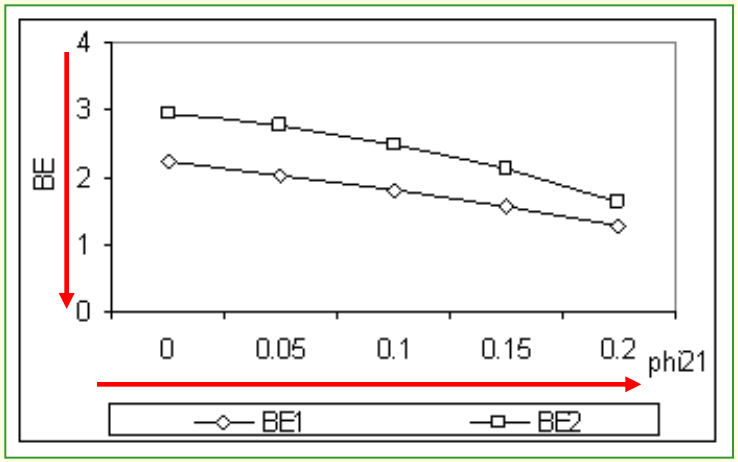
## تحلیل عددی

- تحلیل پیش بینی میانگین متحرک

**اثر شلاقی و مدیریت بازار**

میزان ارتباط تقاضای تویوتا کرولا در ماه جاری به تقاضای ماه قبل تویوتا کمری

$$-0.016 \prec \phi_{21} \prec 0.25$$



irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

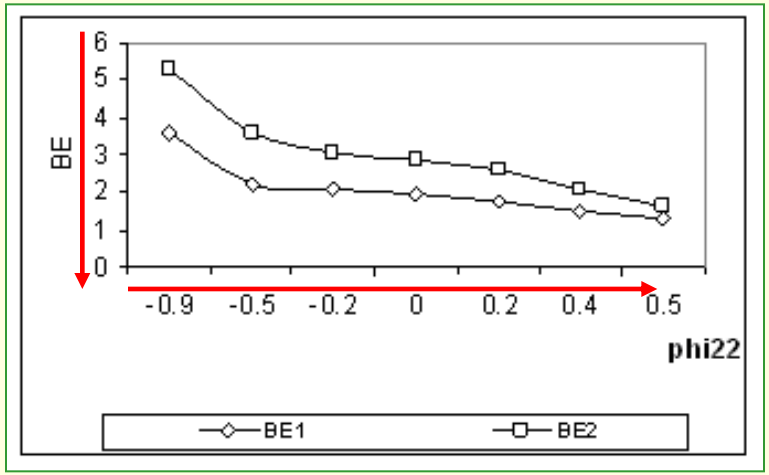
## تحلیل عددی

- تحلیل پیش بینی میانگین متحرک

**اثر شلاقی و مدیریت بازار**

میزان ارتباط تقاضای تویوتا کمری در ماه جاری به تقاضای ماه قبل تویوتا کرولا

$$-0.93 \prec \phi_{22} \prec 0.6$$




**از طریق مدیریت مصرف و اعمال تغییر در ضرایب الگوی تقاضای هر محصول میتوان اثر شلاقی را برای هر دو محصول کاهش داد**

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تحلیل عددی

- تحلیل پیش بینی هموارسازی نمایی

| | | مقادیر اثر شلاقی محصول اول –تویوتا کمری alpha1 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |
| L1 | 1 | 1.179 | 1.165 | 1.149 | 1.170 | 1.215 |
| | 2 | 1.394 | 1.397 | 1.388 | 1.477 | 1.644 |
| | 3 | 1.646 | 1.694 | 1.716 | 1.919 | 2.287 |
| | 4 | 1.932 | 2.058 | 2.134 | 2.498 | 3.145 |
| | 5 | 2.255 | 2.488 | 2.641 | 3.213 | 4.218 |
| | 6 | 2.614 | 2.983 | 3.238 | 4.064 | 5.505 |

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تحلیل عددی

- تحلیل پیش بینی هموارسازی نمایی

مقادیر اثر شلاقی محصول دوم –تویوتا کرولا

| | | alpha2 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |
| L2 | 1 | 1.223 | 1.297 | 1.385 | 1.528 | 1.730 |
| | 2 | 1.490 | 1.713 | 2.001 | 2.478 | 3.191 |
| | 3 | 1.802 | 2.248 | 2.848 | 3.850 | 5.383 |
| | 4 | 2.159 | 2.912 | 3.926 | 5.645 | 8.305 |
| | 5 | 2.560 | 3.675 | 5.236 | 7.861 | 11.957 |
| | 6 | 3.006 | 4.566 | 6.776 | 10.501 | 16.340 |

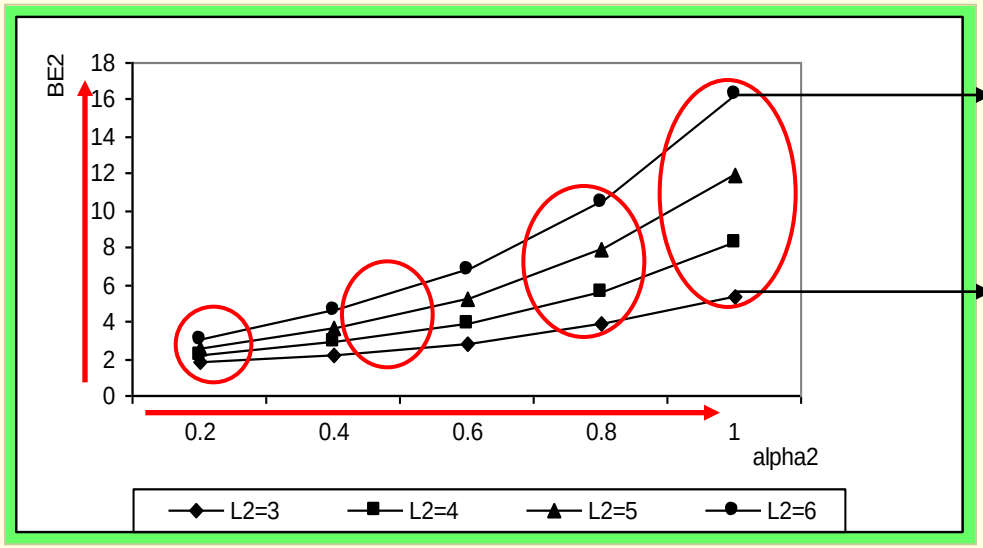
irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تحلیل عددی

- تحلیل پیش بینی هموارسازی نمایی

**تغییرات اثر شلاقی محصول دوم (تویوتا کرولا) نسبت به ضریب هموارسازی**




اثر شلاقی با ضریب هموارسازی نمایی نسبت مستقیم دارد

با افزایش ضریب هموارسازی (اهمیت دادن زیاد به داده های اخیر )، تاثیر لیدتایم در مقدار اثر شلاقی افزایش می یابد

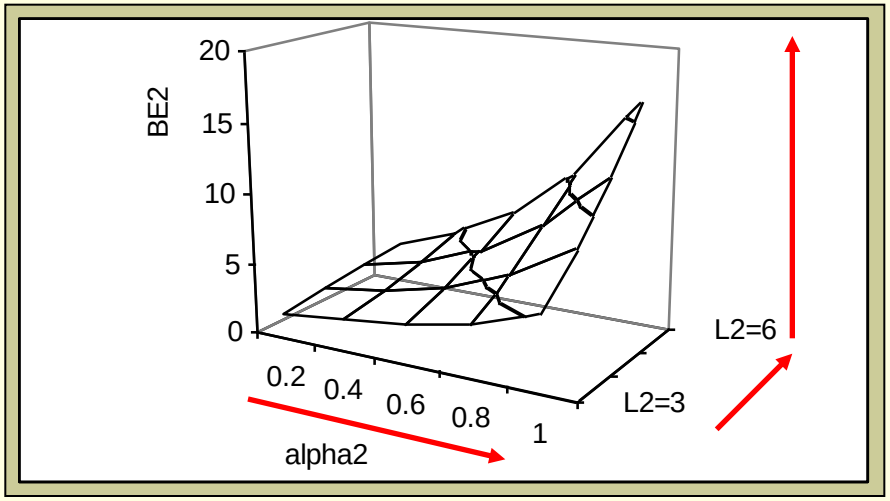
irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تحلیل عددی

- تحلیل پیش بینی هموارسازی نمایی

**تغییرات همزمان اثر شلاقی محصول دوم (تویوتا کرولا) نسبت به ضریب هموارسازی**




**افزایش همزمان ضریب هموارسازی و لیدتایم منجر به افزایش اثرشلاقی می شود**

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تحلیل عددی

- مقایسه دو روش پیش بینی با یکدیگر

**میانگین طول عمر داده های یکسان برای دو روش**

$$\frac{p+1}{2} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\alpha = \frac{2}{p+1}$$

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تحلیل عددی

- مقایسه دو روش پیش بینی با یکدیگر

**مقادیر اثر شلاقی با توجه به دو روش پیش بینی با طول عمر داده های یکسان**

| L1=3 | | | |
|---|---|---|---|
| BE1 | alpha1 | p1 | BE1 |
| 1.7018 | 0.33 | 5 | 1.3808 |
| 1.6942 | 0.4 | 4 | 1.4341 |
| 1.6837 | 0.5 | 3 | 1.5236 |
| 1.7625 | 0.67 | 2 | 1.7077 |
| 2.2872 | 1 | 1 | 2.2872 |

مقادیر اثر شلاقی محصول اول-تویوتا کمری

| L2=3 | | | |
|---|---|---|---|
| BE2 | alpha2 | p2 | BE2 |
| 2.1022 | 0.33 | 5 | 1.6614 |
| 2.2481 | 0.4 | 4 | 1.8323 |
| 2.5078 | 0.5 | 3 | 2.1479 |
| 3.1314 | 0.67 | 2 | 2.8685 |
| 5.3828 | 1 | 1 | 5.3628 |

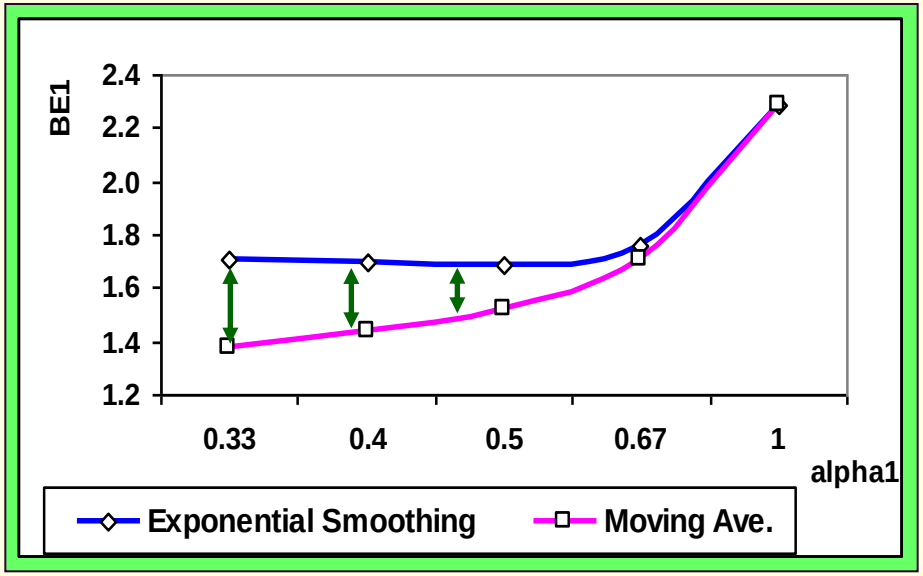
مقادیر اثر شلاقی محصول دوم-تویوتا کرولا

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تحلیل عددی

- مقایسه دو روش پیش بینی با یکدیگر

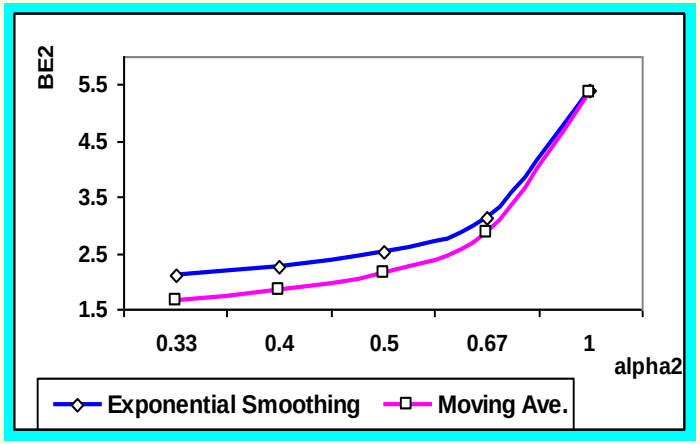


irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تحلیل عددی

- مقایسه دو روش پیش بینی با یکدیگر




**استفاده از روش پیش بینی میانگین متحرک اثر شلاقی کمتری نسبت به روش پیش بینی هموارسازی نمایی ایجاد می کند**

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

- تحلیل عددی
  - تحلیل هزینه

**بررسی نقش هزینه های کمبود و نگهداری در اثر شلاقی**

$$Q_t = \hat{D}_t^L - \hat{D}_{t-1}^L + z(\hat{\sigma}_t^L - \hat{\sigma}_{t-1}^L) + D_{t-1}$$

$$\hat{\sigma}_t^L = \hat{\sigma}_{t-1}^L$$

$$Q_t = \hat{D}_t^L - \hat{D}_{t-1}^L + D_{t-1}$$

$$z = \phi^{-1}\left(\frac{b}{h+b}\right)$$

حذف

h هزینه نگهداری واحد محصول

b هزینه کمبود واحد محصول

**هزینه نگهداری و هزینه کمبود در مقدار اثر شلاقی نقشی ندارند**

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

- تحلیل عددی
  - تحلیل هزینه

**بررسی نقش اثر شلاقی در هزینه های کمبود و نگهداری**

**Zhang, 2004**

متوسط کمبود $\overline{B} = Q(z)\sigma_t^L$

متوسط موجودی $\bar{I} = Q(-z)\sigma_t^L$

$$\hat{\sigma}_t^L = \hat{\sigma}_{t-1}^L$$

$$\left(\hat{\sigma}_t^L\right)^2 = L\gamma + 2\sum_{i=1}^{L-1}(L-i)\gamma(i) + \left(\frac{L}{p}\right)\left[L\gamma - 2\left[\gamma(1) - \left[\left(\frac{L}{p}\right)\sum_{i=1}^{p-1}(p-i)\gamma(i) + \sum_{i=2}^{L+p-1}\gamma(i)\right]\right]\right]$$

$$Q(z) = \int_z^{\infty}(x-z)\varphi(x)dx$$

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

- تحلیل عددی
  - تحلیل هزینه

**بررسی نقش اثر شلاقی در هزینه های کمبود و نگهداری**

| محصول اول-تویوتا کمری | | محصول دوم-تویوتا کرولا | |
|---|---|---|---|
| $p_1 = 2$ | $h_1 = 185$ | $p_1 = 2$ | $h_2 = 120$ |
| $L_1 = 3$ | $b_1 = 780$ | $L_1 = 3$ | $b_2 = 600$ |
| $BE_1 = 1.70$ | | $BE_2 = 2.87$ | |
| $\left(\hat{\sigma}_t^L\right)_1 = 9.64$ | | $\left(\hat{\sigma}_t^L\right)_2 = 5.04$ | |
| $(IC)_1 = h_1 * \bar{I}_1 = 185 * 9.49 = 1756$ | | $(IC)_2 = h_2 * \bar{I}_2 = 120 * 5.332 = 640$ | |
| $(BC)_1 = b_1 * \bar{B}_1 = 780 * 1.002 = 782$ | | $(BC)_2 = b_2 * \bar{B}_2 = 600 * 0.443 = 266$ | |

خرده فروش و تامین کننده در یک تعامل لیدتایم را به ۲ و تعداد دوره ها را به ۳ تغییر می دهند

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

- تحلیل عددی
  - تحلیل هزینه

**بررسی نقش اثر شلاقی در هزینه های کمبود و نگهداری**

| محصول اول–تویوتا کمری | محصول دوم–تویوتا کرولا |
|---|---|
| $BE_1 = 1.29$ | $BE_2 = 1.64$ |
| $\left(\hat{\sigma}_t^L\right)_1 = 6.43$ | $\left(\hat{\sigma}_t^L\right)_2 = 3.36$ |
| $(IC)_1 = h_1 * \bar{I}_1 = 185 * 6.33 = 1171$<br>$(BC)_1 = b_1 * \bar{B}_1 = 780 * 0.67 = 523$ | $(IC)_2 = h_2 * \bar{I}_2 = 120 * 3.55 = 426$<br>$(BC)_2 = b_2 * \bar{B}_2 = 600 * 0.3 = 200$ |

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

- تحلیل عددی
  - تحلیل هزینه

**بررسی نقش اثر شلاقی در هزینه های کمبود و نگهداری**

| | محصول اول-تویوتا کمری | | | محصول دوم-تویوتا کرولا | |
|---|---|---|---|---|---|
| هزینه نگهداری | 1756 | ⇒ | 1171 | 640 | ⇒ 426 |
| هزینه کمبود | 782 | ⇒ | 523 | 266 | ⇒ 200 |

**کاهش اثر شلاقی منجر به کاهش هزینه کمبود و هزینه نگهداری می گردد**

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

- تحلیل عددی
  - تحلیل هزینه

**بررسی نقش اثر شلاقی در هزینه های کمبود و نگهداری**

| کل هزینه نگهداری و کمبود در حالت بهبود یافته | کل هزینه نگهداری و کمبود در حالت نخست |
|---|---|
| 2320 | 3444 |

بهبود

مقدار صرفه جویی

**3444-2320=1124**

در صورتی که هزینه تغییر p از ۲ به ۳ و کاهش L از ۳ به ۲ بیش از ۱۱۲٤ باشد هزینه کاهش اثر شلاقی بیش از منافع آن است و اعمال تغییر در پارامترها *می تواند مقرون به صرفه نباشد*

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تحلیل عددی

مثال عددی-زنجیره تامین ۳ محصولی

$$\begin{cases} D_t^1 = 0.1D_{t-1}^1 + 0.2D_{t-1}^2 + 0.3D_{t-1}^3 \\ D_t^2 = 0.2D_{t-1}^1 + 0.2D_{t-1}^2 + 0.7D_{t-1}^3 \\ D_t^3 = 0.8D_{t-1}^1 + 0.5D_{t-1}^2 + 0.2D_{t-1}^3 \end{cases}$$

$L_1 = 2 \qquad L_2 = 4 \qquad L_3 = 5$

$p = 2$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \gamma_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.5 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.8 \\ 0.2 & 0.2 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 & -0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma(0) = \begin{bmatrix} 2.03 & 2.29 & 0.42 \\ 2.29 & 4.54 & 2.66 \\ 0.42 & 2.66 & 4.35 \end{bmatrix}$$

irmgn.ir

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تحلیل عددی

مثال عددی-زنجیره تامین ۳ محصولی

$$\Gamma(2)=\begin{bmatrix}2.03 & 2.29 & 0.42\\ 2.29 & 4.54 & 2.66\\ 0.42 & 2.66 & 4.35\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.1 & 0.2 & 0.8\\ 0.2 & 0.2 & 0.5\\ 0.3 & 0.7 & -0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.1 & 0.2 & 0.8\\ 0.2 & 0.2 & 0.5\\ 0.3 & 0.7 & -0.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.12 & 2.27 & 0.67\\ 1.91 & 3.53 & 2.45\\ 1.59 & 1.67 & 3.17\end{bmatrix}$$

$$BE_2^1=1+2\left(\frac{2}{2}\right)\left(1+\frac{2}{2}\right)\left(1-\frac{1.12}{2.03}\right)=2.79$$

$$BE_2^2=1+2\left(\frac{4}{2}\right)\left(1+\frac{4}{2}\right)\left(1-\frac{3.53}{4.54}\right)=3.64$$

$$BE_2^3=1+2\left(\frac{5}{2}\right)\left(1+\frac{5}{2}\right)\left(1-\frac{3.17}{4.35}\right)=4.45$$