t ǂn‡ · »k± { ‡ Ï IµTeǂ‡ÂºIL¶‡JIT ¨ ‡ÁIµ¹Àǂn

فصل پنجم : متغییر های تصادفی پیوسته

فصل پنجم

متغیرهای تصادفی پیوسته

۱- اگر x یک متغیر تصادفی با تابع چگالی زیر باشد.

$$f(x)\begin{cases} c(1-x)^2 & -1<x<1 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

الف) مقدار c را بدست آورید

ب) تابع توزیعی تجمعی x چیست؟

الف)

$$\int_{-1}^{1} C(1-X^2)dx = 1 \Rightarrow C(X-\frac{X^3}{3})_{-1}^{1} = 1 \Rightarrow \boxed{C=\frac{3}{4}}$$

ب)

$$F(X)=\int\frac{3}{4}(1-X^2)dx=\frac{3}{4}(X-\frac{X^3}{3})=\frac{3}{4}X-\frac{1}{4}X^3$$

$$F(X)=\begin{cases} \frac{3}{4}(X-\frac{X^3}{3}) & -1<X<1 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

۲- سیستمی شامل یک واحد اصلی به اضافه یک واحد پشتیبان است که میتواند برای یک مدت زمان تصادفی x کار کند. اگر تابع چگالی x (برحسب ماه) بصورت زیر باشد.

$$f(x)\begin{cases} cxe^{-x/2} & x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$$

احتمال اینکه سیستم حداقل ۵ ماه کار کند چقدر است؟

$$P(X\geq 5)=\int_{5}^{\infty} f(x)dx = 1-\int_{0}^{5} f(x)dx$$

$$\int_{0}^{\infty} CXe^{-\frac{X}{2}}dx = 1 \Rightarrow C\int_{0}^{5} xe^{-\frac{X}{2}}dx = 1$$

$$M=\int_{0}^{\infty} Xe^{-\frac{X}{2}}dx \rightarrow \begin{cases} x=u \rightarrow dx=du \\ e^{-\frac{X}{2}}dx=dv \rightarrow -2e^{-\frac{X}{2}}=V \end{cases}$$

$$M = uv - \int vdu = -۲xe^{-\frac{X}{۲}} \Big]_{۰}^{\infty} + \int_{۰}^{\infty} ۲e^{-\frac{X}{۲}} dx = ۴$$

$$\Rightarrow C(۴) = ۱ \Rightarrow C = \frac{۱}{۴}$$

$$P(X \geq ۵) = ۱ - \frac{۱}{۴}\int_{۰}^{۵} xe^{-\frac{X}{۲}} dx = ۱ - (-۳/۵e^{-\frac{۵}{۲}} + ۱)$$

$$P(X \geq ۵) = ۳/۵^{-\frac{۵}{۲}}$$

۳- تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x) = \begin{cases} c(۲x - x^۳) & ۰ < x < \frac{۵}{۲} \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

آیا f یک تابع چگالی باشد؟ در این صورت ، c را تعیین کنید . مساله را برای حالتی که $f(x)$ بصورت زیر است، تکرار کنید.

$$f(x)\begin{cases} c(۲x - x^۲) & ۰ < x < \frac{۵}{۲} \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

ابتدا فرض می کنیم f تابع چگالی باشد در ان صورت :

$$\int_{۰}^{\frac{۵}{۲}} C(۲x - x^۳) = ۱ \Rightarrow C = -\frac{۶۴}{۲۲۵}$$

پس تابع عبارت خواهد بود از :

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{۶۴}{۲۲۵}(۲X - X^۳) & ۰ < X < \frac{۵}{۲} \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

دیده می شود که به ازای هر X دربازه $(۰ , \sqrt{۲})$ مقدار تابع منفی میشود که این امر با شروط تابع چگالی منافات دارد پس $f(x)$ تابع چگالی نیست.

اثبات برای تابع $f(x)=\begin{cases} C(2X-X^2), & 0<X<\frac{5}{2} \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$ ، نیز مانند حالت قبل میباشد.

۴- تابع چگالی طول عمر یک قطعه الکترونیکی (برحسب ساعت) بصورت زیر است:

$$f(x)\begin{cases} \frac{10}{x^2} & x>10 \\ 0 & x\leq 10 \end{cases}$$

الف) $p\{x>20\}$ را پیدا کنید.

ب) تابع توزیعی تجمعی x را بدست آورید.

ج) احتمال اینکه از ۶ قطعه الکترونیکی لااقل ۳ تا برای حداقل ۱۵ ساعت کار کنند چقدر است؟ چه فرض هایی را در نظر می گیرید؟

الف)

$$p(x>20)=1-p(x\leq 20)$$

$$=1-\int_{10}^{20}\frac{10}{X^2}dx=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ب)

$$F(X)=\int f(X)dx=\int\frac{10}{X^2}dx=\frac{-10}{X}$$

$$F(X)=\begin{cases} \frac{-10}{X} & X>10 \\ 0 & X\leq 10 \end{cases}$$

ج) ابتدا احتمال $P(X\geq 15)$ را محاسبه میکنیم:

$$P(X\geq 15)=1-P(X<15)=1-\int_{10}^{15}\frac{10}{X^2}dx=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

پس احتمال آنکه قطعه ای حداقل ۱۵ ساعت کار کند $\left(\frac{2}{3}\right)$ میباشد حال از توزیع دو جمله ای استفاده می کنیم:

$$P(X\geq 3)=1-P(X<3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)$$

$$=1-0/1=0/9$$

۵ - یک دستگاه پمپ بنزین ، دو هفته یک بار بنزین دریافت مـی کنـد اگرحجـم فـروش هفتگی برحسب هزار گالن یک متغیر با تابع چگالی زیر باشد:

$$f(x)=\begin{cases}5(1-x^{3}) & 0<x<1\\ 0 & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

حجم مخزن پمپ بنزین چقدر باشد، تااحتمال تمام شدن بـنزین در یـک هفتـه معیـن ۰/۰۱ گردد؟

اگر فرض کنیم : **X** = حجم فروش هفتگی ، **D** = گنجایش مخزن

$$f(x)=\begin{cases}5(1-X)^{4} & 0<X<1\\ 0 & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

آنگاه : $\frac{1}{2}$(حجم مخزن) = حجم فروش هفتگی

$$P(X>D)=\int_D^1 10(1-X)^4\,dx=0/01$$

$$\Rightarrow 2(1-X)^5\Big]_D^1=0/01\Rightarrow -2(1-D)^5=0/0$$

$$\Rightarrow \boxed{D=1/346}$$

۶ - اگر تابع چگالی x بصورت های زیر باشد، $E(x)$ را محاسبه کنید.

الف)
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0 & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

ب)
$$f(x)\begin{cases}c(1-x^{2}) & -1<x<1\\ 0\end{cases}$$

ج)
$$f(x)\begin{cases}\frac{5}{x^{2}} & x>5 \quad \text{سایر مقادیر}\\ 0 & x\leq 5\end{cases}$$

الف)

$$E(X)=\int_0^\infty xf(X)dx=\frac{1}{4}\int_0^\infty X^2e^{-\frac{X}{2}}dx$$

با دوبار استفاده از روش جزء به جزء داریم :

$$E(X)=\frac{۱}{۴}\left(-۱۶e^{-\frac{X}{۲}}\right)_{۰}^{\infty}=\frac{۱}{۴}(۱۶)=۴$$

ب) بر اساس مسأله ۱ داریم :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۳}{۴}(۱-X^{۲}) & -۱<X<۱\\ ۰ & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-۱}^{۱}xf(x)dx=\frac{۳}{۴}\int_{-۱}^{۱}(X-X^{۳})dx=\frac{۳}{۴}\left(\frac{X^{۲}}{۲}-\frac{X^{۴}}{۴}\right)_{-۱}^{۱}=۰$$

ج)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۵}{X^{۲}} & X>۵\\ ۰ & X\leq ۵\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{۵}^{\infty}xf(x)dx=\int_{۵}^{\infty}\frac{۵}{X}dx=۵Ln(X)\ \Big]_{۵}^{\infty}=\infty$$

۷ - تابع چگالی x بصورت زیر است .

$$f(x)\begin{cases}a+bx^{۲} & ۰\leq x\leq ۱\\ ۰ & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

اگر $E(x)=\frac{۳}{۵}$ باشد، مقادیر a و b را بدست آورید.

$$E(X)=\int_{۰}^{۱}xf(x)dx=\int_{۰}^{۱}(ax+bx^{۳})dx=\frac{a}{۲}+\frac{b}{۴}=\frac{۳}{۵}$$

چون $f(x)$ تابع چگالی است پس :

$$\int_{۰}^{۱}(a+bx^{۲})dx=۱\Rightarrow ax+\frac{bx^{۳}}{۳}\ \Big]_{۰}^{۱}=۱\Rightarrow a+\frac{b}{۳}=۱$$

$$\begin{cases} ۱۰a + ۵b = ۱۲ \\ ۳a + b = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{۳}{۵} \\ b = \frac{۶}{۵} \end{cases}$$

۸ – طول عمر یک لامپ الکترونیکی (برحسب ساعت) یک متغیر تصادفی با تابع چگالی زیر است:

$$f(x) = xe^{-x} \quad x \geq ۰$$

متوسط طول عمر چنین لامپی را محاسبه کنید.

$$E(X) = \int_{۰}^{\infty} xf(x)dx = \int_{۰}^{\infty} X^{۲}e^{-x}dx$$

با دوبار استفاده از روش جزء به جزء داریم :

$$E(X) = -۲e^{-x} \Big]_{۰}^{\infty} = ۲$$

۹- *

۱۰ – قطارهایی که عازم مقصد A هستند از ساعت ۷ صبح بـه فاصله۱۵دقیقه بـه ایستگاه می رسند. در حالیکه قطارهای عازم مقصـد B از ساعت ۰۵ : ۷ بـه فاصلـه ۱۵ دقیقـه وارد ایستگاه می شوند. الف) اگر مسافری در زمانی که بطور یکنواخت بیـن ۷ و ۸ صبـح توزیـع شده است به ایستگاه برسد و سوار اولین قطاری که وارد ایستگاه می گردد بشـود ، بـه چـه نسبتی وی به مقصد A می رود؟

ب) پاسخ قسمت (الف) را اگر مسافر در زمانی به ایستگاه برسد کـه بطـور یکنواخـت بیـن ۱۰: ۷ و ۱۰ : ۸ صبح توزیع شده است بدست آورید.

الف)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۶۰} & ۷ \leq X \leq ۸ \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

چنانچه شخص پس از زمان حرکت قطار عازم مقصد B ، وارد ایستگاه شود، سوار قطـاری خواهد شد که عازم مقصد A می باشد پس :

$$P(\text{شخص عازم مقصد } A \text{ باشد}) = p(۵<x\le ۱۵)+p(۲۰<x\le ۳۰)+p(۳۵<x\le ۴۵)+p(۵۰<x\le ۶۰)$$

$$= \int_{۵}^{۱۵}\frac{۱}{۶۰}dx+\int_{۲۰}^{۳۰}\frac{۱}{۶۰}dx+\int_{۳۵}^{۴۵}\frac{۱}{۶۰}dx+\int_{۵۰}^{۶۰}\frac{۱}{۶۰}dx$$

$$= \frac{۱۰+۱۰+۱۰+۱۰}{۶۰}=\frac{۲}{۳}$$

ب)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۶۰} & ۷:۱۰\le X\le ۸:۱۰\\ ۰ & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

مانند حالت الف فرض می کنیم که شخص در فاصله زمانی خروج قطار B تا ورود قطار A وارد ایستگاه شود لذا داریم :

$$P(\text{شخص عازم مقصد } A \text{ باشد}) = p(۱۰\le x\le ۱۵)+p(۲۰<x\le ۳۰)+p(۳۵<x\le ۴۵)$$

$$+p(۵۰<x\le ۶۰)+p(۵<x\le ۱۰)$$

$$= \int_{۱۰}^{۱۵}\frac{۱}{۶۰}dx+\int_{۲۰}^{۳۰}\frac{۱}{۶۰}dx+\int_{۳۵}^{۴۵}\frac{۱}{۶۰}dx+\int_{۵۰}^{۶۰}\frac{۱}{۶۰}dx\int_{۵}^{۱۰}\frac{۱}{۶۰}dx$$

$$= \frac{۲}{۳}$$

۱۱- *

۱۲- *

۱۳ - شما ساعت ۱۰ صبح به یک ایستگاه اتوبوس می رسید و می دانید که اتوبوس درزمانی که بطور یکنواخت بین ۱۰ و ۱۰:۳۰ است به ایستگاه خواهد رسید.

الف) احتمال اینکه بیش از ۱۰ دقیقه منتظر بمانید چقدر است؟

ب) اگر در ساعت ۱۰:۱۵ هنوز اتوبوس به ایستگاه نرسیده باشد. احتمال اینکه شما حداقل ۱۰ دقیقه دیگر نیز منتظر بمانید چقدر است؟

الف)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۳۰} & ۰\le X\le ۳\\ ۰ & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

$$p(X>۱۰)=۱-p(۰\le x\le ۱۰)=۱-\int_{۰}^{۱۰}\frac{۱}{۳۰}dx=\frac{۲}{۳}$$

ب)
$$p(X \geq ۱۰) = ۱ - p(۰ \leq x < ۱۰) = ۱ - \int_۰^{۱۰} \frac{۱}{۱۵} dx$$
$$= ۱ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

۱۴ - فرض کنید X یک متغیر تصادفی یکنواخت روی فاصله (۱و ۰) باشد ، $E\left[X^n\right]$ را با استفاده از گزاره (۲-۱) محاسبه کرده و نتیجه را با تعریف امید ریاضی مقایسه کنید.

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & ۱ < X < ۰ \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

گزاره (۲-۱):
$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

$$E\left[x^n\right] = \int_۰^۱ X^N (۱) dx = \frac{X^{n+۱}}{n+۱} \Big]_۰^۱ = \frac{۱}{n+۱}$$

۱۵ - اگر X یک متغیر تصادفی نرمال با پارامترهای ۱۰ = μ و ۳۶ = $\sigma^۲$ باشد، احتمالات زیر را محاسبه کنید.

الف) $p\{x > ۵\}$ ، ب) $p\{۴ < x < ۱۶\}$ ، ج) $p\{x < ۸\}$

د) $p\{x < ۲۰\}$ ، هـ) $p\{x > ۱۶\}$

الف)
$$p\{x > ۵\} = p\left\{\frac{X-\mu}{\delta} > \frac{۵-۱۰}{۶}\right\} = P(Z > -\frac{۵}{۶})$$
$$= ۱ - P(Z < -\frac{۵}{۶}) = ۰/۷۹۶۷$$

ب)
$$p\{۴ < X < ۱۶\} = p(\frac{۴-۱۰}{۶} < \frac{X-\mu}{\delta} < \frac{۱۶-۱۰}{۶})$$
$$= P(-۱ < Z < ۱) = ۰/۶۸۲۶$$

ج)
$$p\{x < ۸\} = p\left\{\frac{X-\mu}{\delta} < \frac{۸-۱۰}{۶}\right\} = P(Z < -۰/۳۳)$$
$$= ۰/۳۷۰۷$$

د)
$$p\{x < ۲۰\} = p\left\{\frac{X-\mu}{\delta} < \frac{۲۰-۱۰}{۶}\right\} = P(Z < ۱/۶۷)$$
$$= ۰/۹۵۲۵$$

ه)
$$p\{x > ۱۶\} = p\left\{\frac{X-\mu}{\delta} > \frac{۱۶-۱۰}{۶}\right\} = P(Z > ۱)$$

$$= ۰/۱۵۸۷$$

۱۶ - میزان باران سالیانه (بر حسب اینچ) در یک ناحیه معین دارای توزیع نرمال با $\mu = ۴۰$ و $\delta = ۴$ است احتمال اینکه از امسال برای مدت ۱۰ سال منتظر بمانیم تا میزان بارندگی در سال بیش از ۵۰ اینچ باشد را بدست آورید چه فرض هایی را در نظر می گیرید؟

ابتدا احتمال اینکه بارندگی بیش از ۵۰ اینچ باشد را محاسبه می کنیم:

$$p\{x > ۵۰\} = p\left\{\frac{X-\mu}{\delta} > \frac{۵۰-۴۰}{۴}\right\} = P(Z > ۲/۵) = ۰/۰۰۶۲$$

پس احتمال اینکه بارندگی کوچکتر یا مساوی ۵۰ باشد برابر است با :

$$p(X \le ۵۰) = ۰/۹۹۳۸$$

لذا احتمال اینکه از امسال به مدت ۱۰ سال منتظر بمانیم که میزان بارندگی در سال بیش از ۵۰ اینچ باشد.

برابر است با:
$$P(A) = \binom{۱۰}{۰}(۰/۰۰۶۲)^{۰}(۰/۹۹۳۸)^{۱۰} = ۰/۹۴$$

۱۷ - مردی تلاش در زدن هدفی دارد که اگر پرتاب او در محدوده یک اینچی از هدف باشد ۱۰ امتیاز کسب می کند، اگر بین ۱ و ۳ اینچ از هدف باشد ۵ امتیاز و اگر بین ۳ و ۵ اینچ از هدف باشد ۳ امتیاز کسب خواهد کرد اگر فاصله پرتاب از هدف بطور یکنواخت بین ۰ و ۱۰ توزیع شده باشد، متوسط تعداد امتیازها را بدست آورید.

$$P(X = ۱۰) = \int_{۰}^{۱} \frac{۱}{۱۰}dx = \frac{۱}{۱۰},$$

$$P(X = ۵) = \int_{۱}^{۳} \frac{۱}{۱۰}dx = \frac{۲}{۱۰} \quad ,P(X = ۳) = \int_{۳}^{۵} \frac{۱}{۱۰}dx = \frac{۲}{۱۰}$$

$$E(X) = ۱۰\left(\frac{۱}{۱۰}\right) + ۵\left(\frac{۲}{۱۰}\right) + ۳\left(\frac{۲}{۱۰}\right) = ۲/۶$$

۱۸ - فرض کنید که X یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۵ است. اگر $p\{x > ۹\} = ۰/۲$ باشد، $\mathrm{var}(x)$ را با تقریب بدست آورید.

$$P\left(\frac{X-\mu}{\delta} > \frac{۹-۵}{\delta}\right) = ۰/۲$$

$$P\left(Z > \frac{۴}{\delta}\right) = ۰/۲ \Rightarrow ۱ - \Phi\left(\frac{۴}{\delta}\right) = ۰/۲$$

$$\Phi\left(\frac{۴}{\delta}\right) = ۰/۸ \Rightarrow \frac{۴}{\delta} = ۰/۸۴ \Rightarrow \delta = ۴/۷۶۲$$

$$VaR(X) = \delta^{۲} = (۴/۷۶۲)^{۲} = ۲۲/۶۷$$

۱۹ - اگر X یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۱۲ و واریانس ۴ باشد. مقدار C را چنان پیدا کنید که $p\{x > c\} = ۰/۱$ گردد.

$$p\left(\frac{x-\mu}{\delta} > \frac{c-۱۲}{۲}\right) = ۰/۱ \Rightarrow p(z > \frac{c-۱۲}{c}) = ۰/۱$$

$$۱ - \Phi(\frac{c-۱۲}{۲}) = ۰/۱ \Rightarrow \Phi(\frac{c-۱۲}{۲}) = ۰/۹$$

$$\frac{C-۱۲}{۲} = ۱/۲۸ \Rightarrow C = ۱۴/۵۶$$

۲۰ - اگر ۶۵ درصد از جمعیت یک جامعه بزرگ موافق پیشنهاد افزایش مالیات مدرسه باشند، احتمال تقریبی اینکه یک نمونه تصادفی ۱۰۰ نفری شامل موارد زیر باشد چقدر است؟

الف) حداقل ۵۰ نفر موافق پیشنهاد باشند.

ب) بین ۶۰ و ۷۰ نفر موافق پیشنهاد باشند.

ج) کمتر از ۷۵ نفر موافق پیشنهاد باشند.

الف)

$$P(X \geq ۵۰) = P\left(\frac{X-nP}{\sqrt{nP(۱-P)}} \geq \frac{۵۰-۱۰۰(۰/۶۵)}{\sqrt{۱۰۰(۰/۶۵)(۰/۳۵)}}\right)$$

$$= P(Z \geq -۳/۱۴) = ۰/۹۹۹۲$$

ب)

$$P(۶۰ < X < ۷۰) = P\left(\frac{۵۹/۵-۱۰۰(۰/۶۵)}{\sqrt{۱۰۰(۰/۶۵)(۰/۳۵)}} < Z < \frac{۷۰/۵-۱۰۰(۰/۶۵)}{\sqrt{۱۰۰(۰/۶۵)(۰/۳۵)}}\right)$$

$$= P(-۱/۱۵ < Z < ۱/۱۵) = ۰/۷۴۹۸$$

ج)
$$P(X < ۷۵) = P\left(\frac{X - nP}{\sqrt{nP(1-P)}} < \frac{۷۵ - ۱۰۰(۰/۶۵)}{\sqrt{۱۰۰(۰/۶۵)(۰/۳۵)}}\right)$$

$$= P(Z < ۱/۰۹) = ۰/۹۷۶۷$$

۲۱ - فرض کنید طول قد (بر حسب اینچ) مـردان ۲۵ سـاله یـک متغیر تصـادفی نرمـال بـا پارامترهای $\mu = ۷۱ , \sigma^۲ = ۶/۲۵$ است. چه درصدی از مردان ۲۵ ساله بیشتر از ۶ فوت و ۲ اینچ قد دارند؟

چند درصد از مردان بلند تر از ۶ فوت بیش از ۶ فوت و ۵ اینچ قد دارند؟

با توجه به اینکه هر فوت ۱۲ اینچ است داریم:

قسمت اول)
$$P(X > ۷۴) = P\left(\frac{X-\mu}{\delta} > \frac{۷۴ - ۷۱}{۲/۵}\right) = P(Z > ۱/۲) = ۰/۱۱۵۱$$

درصد مورد نظر عبارتست از : ٪ ۱۱/۵

قسمت دوم) ابتدا باید درصد افراد بالای ۶ فوت را محاسبه کنیم :

$$P(X > ۷۲) = P\left(\frac{X-\mu}{\delta} > \frac{۷۲ - ۷۱}{۲/۵}\right) = P(Z > ۰/۴)$$

$$= ۰/۳۴۴۶$$

سپس با محاسبه درصد افراد بالای ۶ فوت و ۵ اینچ داریم :

$$P(X > ۷۷) = P\left(\frac{X-\mu}{\delta} > \frac{۷۷ - ۷۱}{۲/۵}\right) = P(Z > ۲/۴)$$

$$= ۰/۰۰۸۲$$

لذا درصد مورد نظر عبارت است از :

$$\frac{۰/۰۰۸۲}{۰/۳۴۴۶} \times ۱۰۰ = ۲/۳۸\%$$

۲۲ - پهنای قالبهای میله های آلومینیمی (بر حسب اینچ) دارای توزیع نرمال با $\mu = ۰/۹۰۰۰$ و $\sigma = ۰/۰۰۳۰$ است. اگر حد مجاز تعیین شده برای پهنای قالبها برابر با $۰/۹۰۰۰ \pm ۰/۰۰۵۰$ باشد.

الف) چه درصدی از قالبها معیوب هستند؟

ب) حداکثر مقدار مجاز σ که باعثنمی شود بیشتر از ۱ معیوب در ۱۰۰ قالب داشته باشیم چقدر است.

الف) ابتدا احتمال سالم بودن قالبها را محاسبه می کنیم

$$P(۰/۸۹۵ \le X \le ۰/۹۰۵) = P\left(\frac{۰/۸۹۵-۰/۹}{۰/۰۰۳} \le Z \le \frac{۰/۹۰۵-۰/۹}{۰/۰۰۳}\right)$$

$$= P(-۱/۶۷ \le Z \le ۱/۶۷) = ۰/۹۰۵$$

پس احتمال معیوب بودن قالبها برابر است با :

$$P(X') = ۱-۰/۹۰۵ = ۰/۰۹۵$$

لذا درصد مورد نظر عبارت است از :

$$۰/۰۹۵ \times ۱۰۰ = ۹/۵\%$$

ب) تعبیر دیگر این مسأله آن است که می خواهیم ۹۹٪ قالبها سالم باشند پس داریم:

$$P(۰/۸۹۵ \le X \le ۰/۹۰۵) = ۰/۹۹ \Rightarrow P\left(\frac{-۰/۰۰۵}{\delta} \le Z \le \frac{۰/۰۰۵}{\delta}\right) = ۰/۹۹$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{۰/۰۰۵}{\delta}\right) - \Phi\left(\frac{-۰/۰۰۵}{\delta}\right) = ۰/۹۹ \Rightarrow \Phi\left(\frac{۰/۰۰۵}{\delta}\right) = ۰/۹۹۵$$

$$\Rightarrow \frac{۰/۰۰۵}{\delta} = ۲/۵۸ \Rightarrow \delta = \frac{۰/۰۰۵}{۲/۵۸} = ۰/۰۰۱۹۳۸ \approx ۱/۹ \times ۱۰^{-۳}$$

۲۳ - یک تاس سالم هزار بار پرتاب می شود. احتمال اینکه عدد ۶ بین ۱۵۰ تا ۲۰۰ مرتبه مشاهده شود را با تقریب بدست آورید . اگر عدد ۶ دقیقاً ۲۰۰ مرتبه مشاهده شود، احتمال اینکه عدد ۵ کمتر از ۱۵۰ مرتبه مشاهده گردد را بدست آورید.

قسمت اول)

$$P(۱۵۰ < X < ۲۰۰) = P\left(\frac{۱۴۹/۵-۱۰۰۰\left(\frac{۱}{۶}\right)}{\sqrt{۱۰۰۰\left(\frac{۱}{۶}\right)\left(\frac{۵}{۶}\right)}} < Z < \frac{۲۰۰/۵-۱۰۰۰\left(\frac{۱}{۶}\right)}{\sqrt{۱۰۰۰\left(\frac{۱}{۶}\right)\left(\frac{۵}{۶}\right)}}\right)$$

$$= P-(۱/۴۶ < Z < ۲/۸۷) = ۰/۹۲۵۸$$

قسمت دوم)

$$P(X < ۱۵۰) = P(X \le ۱۴۹/۵)$$

$$= P\left(\frac{X - nP}{\sqrt{nP(۱-P)}} \le \frac{۱۴۹/۵ - ۸۰۰(\frac{۱}{۵})}{\sqrt{۸۰۰(\frac{۱}{۵})(\frac{۴}{۵})}}\right) = P(Z \le -۰/۹۳) = ۰/۱۷۶۲$$

۲۴ – طول عمر تراشه های تولید شده توسط یک کارخانه تولید قطعات الکترونیکی دارای توزیع نرمال با پارامترهای $\mu = ۱/۴ \times ۱۰^{۶}$ و $\sigma = ۳ \times ۱۰^{۵}$ (بر حسب ساعت) است. احتمال تقریبی اینکه یک بسته ۱۰۰ تایی از این تراشه ها شامل ۲۰ تراشه که طول عمرشان کمتر از $۱/۸ \times ۱۰^{۶}$ را بدست آورید.

ابتدا احتمال تراشه ای را محاسبه میکنیم که طول عمر آن کمتر از $۱/۸ \times ۱۰^{۶}$ می باشد.

$$P(X < ۱/۸ \times ۱۰^{۶}) = P\left(\frac{X-\mu}{\delta} < \frac{۱/۸ \times ۱۰^{۶} - ۱/۴ \times ۱۰^{۶}}{۳ \times ۱۰^{۵}}\right)$$

$$= P(Z < ۱/۳۳) = ۰/۶۲۹۳$$

حال از توزیع دوجمله ای استفاده می کنیم .

$$P(X = ۲۰) = \binom{۱۰۰}{۲۰}(۰/۶۲۹۳)^{۲۰}(۰/۳۷۰۷)^{۸۰} = ۱/۶۹ \times ۱۰^{-۱۸}$$

۲۵- *

۲۶ - دو نوع سکه در کارخانه ای تولید می شود یکی سالم و دیگری اریب که ۵۵ درصد از مواقع شیرمی آید یکی از این سکه ها در اختیار ما است اما نمی دانیم که سکه سالم یا اریب است . برای تحقیق اینکه کدامیک از دو سکه را در اختیار داریم آزمون آماری زیر را انجام می دهیم : سکه را ۱۰۰۰ مرتبه پرتاب کرده اگر حداقل ۵۲۵ مرتبه شیر مشاهده شود ، آنگاه نتیجه می گیریم که سکه اریب است ولی اگر کمتر از ۵۲۵ مرتبه شیر مشاهده شود، آنگاه نتیجه می گیریم که سکه سالم است . اگر سکه واقعاً سالم باشد، احتمال اینکه به نتیجه غلط برسیم چقدر است؟ اگر سکه اریب باشد پاسخ چیست؟

قسمت اول)

$$P(X < ۵۲۵) = P(X \le ۵۲۴/۵)$$

$$= P\left(\frac{X - nP}{\sqrt{nP(1-P)}} \le \frac{۵۲۴/۵ - ۱۰۰۰(۰/۵)}{\sqrt{۱۰۰۰(۰/۵)(۰/۵)}}\right) = P(Z \le ۱/۵۵)$$

احتمال اینکه به نتیجه درست برسیم :

$$= ۰/۹۳۹۴$$

پس احتمال اینکه به نتیجه غلط برسیم برابر است با :

$$P(A) = ۱ - ۰/۹۳۹۴ = ۰/۰۶۰۶$$

قسمت دوم)

$$P(X \ge ۵۲۵) = ۱ - P(X \le ۵۲۴/۵)$$

$$= ۱ - P\left(\frac{X - nP}{\sqrt{nP(1-P)}} \le \frac{۵۲۴/۵ - ۱۰۰۰(۰/۵۵)}{\sqrt{۱۰۰۰(۰/۵۵)(۰/۴۵)}}\right)$$

$$= ۱ - P(Z \le -۱/۶۲) = ۰/۹۴۷۴$$

احتمال اینکه به نتیجه غلط برسیم برابر است با :

$$P(A) = ۱ - ۰/۹۴۷۴ = ۰/۰۵۲۶$$

۲۷- *

۲۸- *

۲۹- *

۳۰ - مدت زمانی که لازم است تا یک ماشین را تعمیر کنیم (بر حسب ساعت)، دارای توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = \frac{۱}{۲}$ است.

الف) احتمال اینکه مدت تعمیر بیش از ۲ ساعت طول کشد را بدست آورید.

ب) احتمال شرطی اینکه زمان تعمیر حداقل ۱۰ ساعت طول بکشد بشرط اینکه بیش از ۹ ساعت از زمان تعمیر گذشته باشد را بدست آورید.

الف)

$$P(X > ۲) = \int_{۲}^{\infty} \frac{۱}{۲} e^{-\frac{۱}{۲}x} dx = -e^{-\frac{۱}{۲}x} \Big]_{۲}^{\infty} = e^{-۱}$$

ب)

$$P(X \ge ۱۰ | X > ۹) = P(X > ۱) = \int_{۱}^{\infty} \frac{۱}{۲} e^{-\frac{۱}{۲}x} dx = -e^{-\frac{۱}{۲}x} \Big]_{۱}^{\infty} = e^{-\frac{۱}{۲}}$$

* ۳۵

۳۱ - طول عمر یک رادیو برحسب سال دارای توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = \frac{1}{8}$ است. اگر فردی یک رادیو دست دوم خریداری کند، احتمال اینکه ۸ سال دیگر کار کند چقدر است؟

$$P(X > 8) = \int_{8}^{\infty} \frac{1}{8} e^{-\frac{1}{8}X} dx = -e^{-\frac{1}{8}X} \Big]_{8}^{\infty} = e^{-1}$$

۳۲ - فردی ادعا می کند، کل مسافتی که (بر حسب هزار مایل) می تواند یک اتومبیل طی کند قبل از اینکه نیاز به تعمیر داشته باشد یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\lambda = \frac{1}{20}$ است. فرد دیگری ماشین دست دومی دارد که ادعا می کند فقط ۱۰۰۰۰ مایل کار کرده است. اگر فرد اول ماشین را خریداری کند، احتمال اینکه او حداقل ۲۰۰۰۰ مایل دیگر بتواند استفاده کند چقدر است؟

مسأله را با فرض اینکه طول عمر ماشین بر اساس مسافت طی شده دارای توزیع نمایی نبوده بلکه دارای توزیع یکنواخت (بر حسب هزار مایل) روی فاصله (۴۰ و ۰) باشد تکرار کنید.

قسمت اول)

$$P(X \geq 20) = \int_{20}^{\infty} \frac{1}{20} e^{-\frac{1}{20}X} dx = -e^{-\frac{1}{20}X} \Big]_{20}^{\infty} = e^{-1} = -e^{-\frac{1}{20}X} \Big]_{20}^{\infty} = e^{-1}$$

قسمت دوم) چون ۱۰۰۰۰ مایل را طی کرده است توزیع روی فاصله (۳۰ و ۰) خواهد بود.

$$P(X \geq 20) = \int_{20}^{30} \frac{1}{30} dx = \frac{1}{3}$$

۳۳- نرخ ابتلا به بیماری سرطان ریه برای یک مرد سیگاری t ساله بصورت زیر است:

$$\lambda(t) = 0/027 + 0/00025(t-40)^2 \quad t \geq 40$$

با فرض اینکه یک مرد ۴۰ ساله سیگاری از سایر خطرات دیگر مصون باشد. احتمال اینکه او تا سن الف) ۵۰ سالگی، ب) ۶۰ سالگی بدون ابتلا به سرطان ریه زنده بماند چقدر است؟

با توجه به اینکه $\lambda(t)$ نرخ ابتلا به بیماری سرطان (نرخ خرابی) می باشد، احتمال ابتلا به بیماری سرطان برابر است با :

$$P(X) = \lambda(t)$$

الف) A = پیشامد ابتلا به بیماری ، B = پیشامد زنده ماندن بدون ابتلا به سرطان

$$P(A|۴۰ < t \le ۵۰) = ۱ - \exp\left\{-\int_{۴۰}^{۵۰}(۰/۰۲۷ + ۰/۰۰۰۰۲۵(t-۴۰)^۲)dt\right.$$

$$= ۱ - \exp\{\ -(۰/۰۲۷t + \frac{۰/۰۰۰۰۲۵}{۳}(t-۴۰)^۳)\ \}_{۴۰}^{۵۰}$$

$$P(B) = ۱ - ۰/۵۸ = ۰/۴۲$$

ب) C = پیشامد زنده ماندن بدون ابتلا به بیماری

$$P(A|۴۰ < t \le ۶۰) = ۱ - \exp\left\{-\int_{۴۰}^{۶۰}(۰/۰۲۷ + ۰/۰۰۰۰۲۵(t-۴۰)^۲)dt\right.$$

$$= ۱ - \exp(-۱/۲۰۶) = ۰/۷$$

$$P(C) = ۱ - ۰/۷ = ۰/۳$$

۳۴ - فرض کنید توزیع طول عمر قطعه ای دارای تابع نرخ خرابی $(t > ۰)\lambda(t) = t^۳$ است(بر حسب سال) احتمال پیشامدهای زیر را بدست آورید.

الف) طول عمر قطعه ۲ سال می باشد.

ب) طول عمر قطعه بین ۰/۴ تا ۱/۴ سال باشد.

ج) قطعه یک سال کارکرده با چه احتمالی تا ۲ سال کار می کند.

۳۴ - الف)

$$P(۰ < t \le ۲) = ۱ - \exp\left\{-\int_{۰}^{۲} t^۳ dt\right\}$$

$$=۱-\exp\left\{-\left(\frac{t^۴}{۴}\right)\Big]^{۲}\right\}=۱-۰/۰۱۸=۰/۹۸۲$$

ب)

$$P(۰/۴<t<۱/۴)=۱-\exp\left\{-\int_{۰/۴}^{۱/۴}t^۳\,dt\right\}$$

$$=۱-۰/۳۸۵=۰/۶۱۵$$

ج)

$$P(۱<t\leq ۲)=۱-\exp\left\{-\int_{۱}^{۲}t^۳\,dt\right\}$$

$$=۱-۰/۰۲۳۵=۰/۹۷۶۵$$

۳۵ - اگر x به طور یکنواخت روی فاصله (۱ و ۱-) توضیح شده باشد، مطلوب است :

الف) $p\left\{|x|>\frac{۱}{۲}\right\}$

ب)تابع چگالی متغیر تصادفی $|x|$

الف)

$$P\left\{|X|>\frac{۱}{۲}\right\}=۱-P\left\{|X|<\frac{۱}{۲}\right\}$$

$$=۱-P\left\{-\frac{۱}{۲}<X<\frac{۱}{۲}\right\}=۱-\int_{-\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۱-(-۱)}dx$$

$$=۱-\left[\frac{۱}{۲}X\right]_{-\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}$$

ب)

$$P\{Y\leq y\}=P\{|X|\leq y\}=P\{-y\leq X\leq y\}$$

$$=Fx(y)-F_X-F_X(-y)=F_y(y)$$

$$\left.\begin{array}{l}F_X(y)=\int_{۰}^{y}\frac{۱}{۲}dx=\frac{y}{۲}\\[2ex] F_X(-y)=\int_{۰}^{-y}\frac{۱}{۲}dx=-\frac{y}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow F_X(y)-F_X(y)$$

$$=y$$

$$F_y(y) = y \Rightarrow f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

$$\Rightarrow f_y(y) = ۱$$

۳۶ - اگر y بطور یکنواخت روی فاصله (۵-۰) توزیع شده باشد، احتمال، اینکه هر دو ریشه معادله ۰=۲+ Y + ۴xY + ۴x۲ حقیقی باشند چقدر است؟

چون باید دوریشه حقیقی داشته باشد لذا باید :

$$\Delta = B^۲ - ۴AC = (۴y)^۲ - ۴(۴)(y+۲) > ۰ \Rightarrow ۱۶(y-۲)(y+۱) >$$

پس احتمال مورد نظر عبارت است از :

$$P(۲ < y < ۵) = \int_۲^۵ \frac{۱}{۵} dx = \frac{۳}{۵}$$

۳۷- اگر X یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر = λ باشد، تابع چگـالی متغیر تصـادفی $Y = \log X$ را محاسبه کنید.

$$P(Y \le y) = P(\log x \le y) = P(X \le ۱۰^Y) = Fy(y)$$

$$= F_X(۱۰^Y)$$

$$F_X(۱۰^Y) = \int_۰^{۱۰^y} e^{-X} dx = -e^{-X} \Big]_۰^{۱۰^y} = -e^{-۱۰^y} +$$

$$Fy(y) = ۱ - e^{-۱۰^y} \Rightarrow fy(y) = \frac{dfy(y)}{dy} = ۱۰^y(\ln ۱۰)e^{۱۰^Y}$$

۳۸ - اگر X بطور یکنواخت روی فاصله (۱ و ۰) توزیع شده باشد، تابع چگالی $Y = e^x$ را بدست آورید.

$$P(Y \le y) = P(e^x \le y) = P(X \le \ln y)$$

$$= F_X(\ln y) = Fy(y)$$

$$F_X(\ln y) = \int_۰^{\ln y} \left(\frac{۱}{۱-۰}\right) dx = \ln y = Fy(y)$$

$$fy(y) = \frac{dfy(y)}{dy} = \frac{۱}{y}$$

Sheldon Ross

A First Course in Probability

شابک: ۳-۲۸-۷۰۷۳-۹۶۴