Subject:
Year. Month. Date. ( )

تحقیق در عملیات 1

فصل 1 : تعاریف مقدماتی و مدل سازی ریاضی

* تعریف دقیق و مشخصی برای OR وجود ندارد اما می توان گفت:

تحقیق در عملیات در واقع استفاده از "مدل سازی ریاضی" در "حل مسائل واقعی تصمیم گیری"، به منظور تعیین "بهترین تصمیم ممکن" است.

* تحقیق در عملیات بخشی از، ریاضیات کاربردی، است.

* OR در دیدگاهی کلی به دو شاخه اصلی تقسیم می شود:

1. مدل های احتمالی 2. مدل های قطعی (Deterministic Models)

در مدل های قطعی فرض می شود کلیه داده ها و پارامترهای مدل قطعی و مشخص است.

در مدل های احتمالی (probabilistic Models) حداقل یکی از داده ها یا پارامترهای مدل، حالت عدم قطعیت دارد.

قطعی: برنامه ریزی خطی 21_711 21_751
" غیر خطی 712_
" عدد صحیح 715_
" پویا 716_
" حمل و نقل 761_
" شبکه 538_

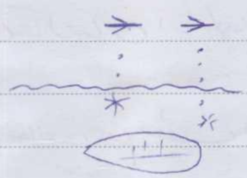
Subject: [illegible]
Year. Month. Date. ( )

احتمال:
تئوری صف 742-21
تئوری تصمیم گیری 138.
فرآیندهای تصادفی 746-
شبیه سازی 942-
پیش بینی
کنترل موجودی

تاریخچه تحقیق در عملیات:

در طول جنگ جهانی دوم تیمی متشکل از تعدادی ریاضیدان، فیزیکدان، مهندس در انگلستان تحت نظر فیزیکدانی به نام Blackett تشکیل شد که سعی آن‌ها در تحقیق بر روی عملیات نظامی، و ارائه راه حل عملی برای آن بود. مسئله اول:

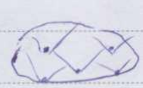
در چه ارتفاعی بمب رها شود تا بیشترین صدمه را



به زیردریایی بزند؟

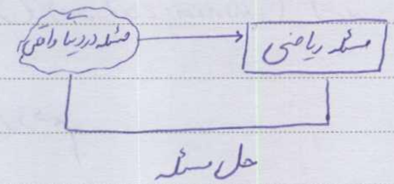
مسأله دوم: محل استقرار رادارها در کجای شهر باشد تا با کمترین تعداد رادارها

کل شهر پوشش داده شود؟



OR در اقتصاد بسیار مؤثر است

اولین گام در جهت حل یک مسئله تصمیم گیری، مدل سازی مسئله است.



تمرین: جهت تبدیل یک مسئله در دنیای واقعی به یک مدل ریاضی باید فرضیات مطرح شده را چگونه در نظر گرفت؟

مدل سازی ریاضی مسأله در قالب زیر را برنامه ریزی ریاضی (Mathematical programing) گویند.

* یک مدل برنامه ریزی ریاضی از عناصر زیر تشکیل می شود:

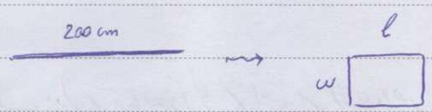
I) متغیرهای تصمیم گیری (Decision Variables) مجهولات (متغیرهایی) هستند که در مدل وجود دارند و هدف از حل مدل تعیین "بهترین" مقدار برای آنها با توجه به عناصر بعد است.

II) تابع هدف (Objective function): تابع ریاضی از متغیرهای تصمیم گیری است

که بیانگر هدف مسئله در قالب یک تابع ریاضی است. در اغلب مسائل این تابع هدف به صورت حداکثر سازی/بیشینه سازی (Maximization) یا حداقل سازی، کمینه سازی (Minimization) است که به ترتیب آنها را Max و Min نشان می دهیم.

III) محدودیت ها (constraints): محدودیت های موجود در مدل هستند که متغیرهای تصمیم گیری مجاز به نقض آن نیستند.

مثال: یک میله پلاستیکی که قابلیت انعطاف و تغییر شکل را دارد به طول 200 cm در اختیار داریم. می خواهیم آن را به صورت مستطیل در آوریم که مساحت آن حداکثر باشد. ابعاد آن؟



متغیرهای تصمیم گیری: طول l

عرض w

تابع هدف: $\max\ z = lw$

محدودیت ها: $l + w = 100$ s.t. ~ subject to

(مستقیماً از صورت مسئله نتیجه شده)

$l, w \geq 0$ (محدودیت علامت: وابسته به علامت متغیرها)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

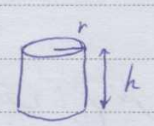
... حل می کنیم :
$l^* = w^* = 50$
$z^* = 2500$

* به بهترین مقدار متغیرها که ضمن ارضای کلیه محدودیت ها مسئله، مقدار تابع هدف را نیز به بهترین مقدار ممکن می رساند، جواب بهینه (Optimal Solution) گویند.

* به جواب هایی که در کلیه محدودیت ها مسئله صدق می کنند اما ضرورتاً جواب بهینه نیستند جواب موجه (Feasible Solution) گویند.

* جواب بهینه حتماً جواب موجه هم هست اما برعکس نه.

مثال: در یک کارخانه تولید رنگ، رنگ ها تولیدی در قوطی ها استوانه ای ریخته شده و بدست مشتری می رسد. می دانیم که هر cm^2 از ماده تشکیل دهنده این قوطی ها 0.5 g وزن دارد. ما نمی خواهیم وزن قوطی ها بیش از 250 g شود (قبل از ریختن رنگ) ابعاد قوطی ها چقدر باشد تا حجم قوطی ها max شود؟



متغیرهای تصمیم گیری : شعاع r
ارتفاع h

تابع هدف : $\max\ v = \pi r^2 h$
s.t

Subject:
Year. Month. Date. ( )

محدودیت ها : $\times 0.5 \leqslant 250$ مساحت کل $\Leftarrow$ وزن $\leqslant 250$

$r, h \geqslant 0$ $\Rightarrow (2\pi r^2 + 2\pi r h) \times 0.5 \leqslant 250$

* در مدل های برنامه ریزی ریاضی علامت بکار رفته جهت محدودیت ها باید $\leqslant$ یا

$\geqslant$ یا $=$ باشد ($>$ و $<$ نداریم)

r, h اگر 0 باشند جواب موجه هستند اما بهینه نیستند

اگر محدودیت ها نباشند r و h ، ∞ ، v را Max می کنند اما محدودیت داریم.

$\leftarrow$ روش حل مسئله و تمرین تشویق

* چارچوب کلی یک مدل برنامه ریزی ریاضی :

$$\max(\min)\ z = f(x_1, \ldots, x_n)$$

s.t.

محدودیت ها : $g_i(x_1, \ldots, x_n) \begin{Bmatrix} \leqslant \\ \geqslant \\ = \end{Bmatrix} b_i \qquad x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$

$i = 1, \ldots, m$

* یک تابع نظیر $f(x_1, \ldots, x_n)$ را تابع خطی (Linear Function) گویند اگر :

$f(x_1, \ldots, x_n) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n + k$ که در آن $c_1, \ldots, c_n$ و k مقادیر

ثابت هستند

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* اگر در مدل برنامه ریزی ریاضی، کلیه توابع موجود خطی باشند به آن «مدل برنامه ریزی خطی» (Linear Programing) گویند که آن را به اختصار با LP نمایش می دهند

ولی اگر حداقل یکی از این توابع خطی نباشند و یا قابل تبدیل به مدل خطی نباشند

آن را مدل برنامه ریزی غیرخطی (Nonlinear P.-) یا NLP گویند.

* چارچوب کلی یک برنامه ریزی خطی (LP):

$$Max(Min)\ Z = C_1X_1 + \dots + C_nX_n \quad *$$

محدودیت: s.t.

$$1)\quad a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \quad \{\ \}\quad b_1$$

$$2)\quad a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \quad \{\ \}\quad b_2$$

$$\vdots$$

$$m)\quad a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \quad \{\ \}\quad b_m$$

$$,\ X_1, \dots, X_n \geq 0$$

* فرم ماتریسی مدل LP:

$$Max(Min)\ Z = CX$$

s.t.

$$AX \{\leq\} b$$

$$X \geq 0$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ بردار متغیرها

$C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$: بردار ضرایب متغیرها در تابع هدف

$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ = ماتریس ضرایب = ماتریس ضرایب متغیرها در محدودیت‌ها ← n متغیر و m محدودیت

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ بردار ضرایب سمت راست

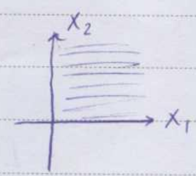
* اگر در محدودیت علامت متغیرها، بعضی یا تمام متغیرها از جنس اعداد صحیح غیرمنفی باشند «مدل برنامه‌ریزی اعداد صحیح» (Integer Programing Model) گوییم و به اختصار با IP آنرا نشان می‌دهیم:

$x_i \geq 0$, Int

(x_i عدد صحیح غیرمنفی)

(LP)

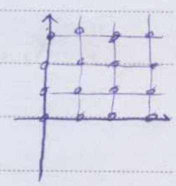
$x_1, x_2 \geq 0$



فضای پیوسته

(IP)

$x_1, x_2 \geq 0$, Int



فضای گسسته

Subject:
Year. Month. Date. ( )

**مدل سازی مسائل بصورت مدل های LP :

مدل برنامه ریزی تولید (Production Planning Model)

3 محصول مختلف در یک کارگاه کوچک تولیدی با توجه به 3 نوع عملیات مختلف تولید می شوند. مدت زمان انجام هریک از عملیات بر روی هر واحد از محصولات برحسب دقیقه و سایر اطلاعات در جدول زیر داده شده. می خواهیم میزان بهینه تولید روزانه هر محصول را با هدف حداکثرسازی سود کارگاه تعیین کنیم.

	محصول 1	محصول 2	محصول 3	حداکثر زمان عملیات برحسب دقیقه / روز
تراشکاری	1	2	1	430
جوشکاری	3	0	2	460
ورق کاری	1	4	0	420
سود حاصل از تولید هر واحد محصول (تومان)	3000	2000	5000	

متغیرهای تصمیم گیری : تعداد محصول i که در روز تولید می شود : X_i $i = 1, 2, 3$

تابع هدف : $\max\ Z = 3000X_1 + 2000X_2 + 5000X_3$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

محدودیت ها:

① $X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 430$

② $3X_1 + 0 + 2X_3 \leq 460$

③ $X_1 + 4X_2 \leq 420$

④ $X_1, X_2, X_3 \geq 0$

نوع محصول مشخص شده ← می تواند Int هم باشد.

، حل مدل با استفاده از نرم افزارها

* نرم افزارهای حل مدل های LP :

* CPLEX ، TORA ، MPL ، Lindo ، Lingo

ادامه مسئله برنامه ریزی تولید :

جواب بهینه : $X_1^* = 0$, $X_2^* = 100$, $X_3^* = 230$ $Z^* = 1{,}350{,}000$

* بر طبق جواب بهینه ، برنامه تولیدی جهت حداکثر سازی سود کارگاه به میزان 1,350,000 تومان در روز ، تولید محصول 2 و 3 به میزان به ترتیب 100 ، 230 واحد در روز و عدم تولید محصول 1 است.

حال فرض می کنیم مدیر کارگاه تمایل دارد از محصول شماره 1 ، حداقل 20 واحد تولید داشته باشد ← محدودیت پنجم : ⑤ $X_1 \geq 20$

← جواب بهینه تغییر می کند

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در این حالت جواب بهینه Z کم می‌شود : $Z^* = 1,260,000$

(حداقل محصول 1 باید تولید شود) ⇐ $X_1^* = 20 \,,\; X_2^* = 100 \,,\; X_3^* = 200$

حال مدیر کارگاه خواهان این است که مجموع تعداد محصولات 1 و 2 حداقل 150 تا باشد.

(چون در مقدار بهینه قبلی صدق نمی‌کند، محدودیت جدید اضافه شده)

⑥ $X_1 + X_2 \geq 150$

$\Rightarrow Z^* = 1,060,000 \,,\; X_1^* = 60 \,,\; X_2^* = 90 \,,\; X_3^* = \overset{140}{\overset{\uparrow}{0}}$

(اهمیت محصول 1 و 2 بالا رفته ⇐ اینگونه شده)

تمرین تشویقی : درصورتی که ترتیب عملیات انجام کردن مهم بود به این ترتیب که :

مراحل ←
محصول 1 ① → ③ → ②
محصول 2 ③ → ①
محصول 3 ② → ①

در پایان هر عملیاتی 2min زمان تلف شده

و کلاً نیز 440 min در روز وقت داشته باشیم.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مسئله برنامه ریزی رژیم غذایی (Diet Problem) :

اولین مدل واقعی که به وسیله LP مدل سازی و حل شد این مسئله بود که شامل تعیین رژیم غذایی برای نظامیان یک واحد نظامی بود که توسط Stigler مدل سازی و حل شد.

فرض کنید بخواهید برنامه تغذیه روزانه تان در دو وعده‌ی صبحانه و ناهار خود را برنامه ریزی کنید با توجه به تنقلات موجود در بوفه دانشگاه شریف، اطلاعات زیر:

	هزینه (تومان)	چربی (g)	قند (g)	کاکائو (g)	کالری
هر قطعه کیک	500	2	2	3	400
هر قطعه بستنی (Scoop)	200	4	2	2	200
هر بطری نوشابه	300	1	4	-	150
هر بسته آجیل	800	5	4	-	500

با توجه به برنامه غذایی خود می خواهیم روزانه حداقل 500 کالری، 6g کاکائو، 10g قند و 8g چربی را استفاده کنیم و کمترین هزینه را داشته باشیم. برنامه؟

متغیرهای تصمیم گیری :

$X_1 =$ تعداد قطعه های کیک

$X_2 =$ بستنی

$X_3 =$ نوشابه

$X_4 =$ آجیل

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$Min\ Z = 500X_1 + 200X_2 + 300X_3 + 800X_4$$

st.

محدودیت ها :

(1) $400X_1 + 200X_2 + 150X_3 + 500X_4 \geq 500$

(2) $3X_1 + 2X_2 \geq 6$

(3) $2X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 4X_4 \geq 10$

(4) $2X_1 + 4X_2 + 1X_3 + 5X_4 \geq 8$

(5) $X_j \geq 0$, Int

Lingo : این تاثیر ندارد

حل ⟵ $Z^* = 900 \quad X_2^* = 3 \quad X_3^* = 1 \quad X_1^* = X_4^* = 0$

این رژیم بصورت زیر است :

750 کالری
6 g کاکائو
10 g قند
13 g چربی

(سمت چپ محدودیت ها)

اگر در مسئله داده شوده ، حداقل ها تبدیل به حداکثر ~~می~~ شود در اینصورت در محدودیت ها

$\geq$ به $\leq$ تبدیل می شود. در اینصورت : $Z^* = 0$, $X_1^* = X_2^* = X_3^* = X_4^* = 0$

حال فرض کنید که حداقل سازی هزینه مورد نظر ما نباشد بلکه حداقل کالری را با توجه به

سایر محدودیت ها داشته باشیم (تابع هدف عوض می شد)

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\min \ w = 400X_1 + 200X_2 + 150X_3 + 500X_4$$

s.t.

① $3X_1 + 2X_2 \geq 6$

② $2X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 4X_4 \geq 10$

③ $X_1 + 4X_2 + X_3 + 5X_4 \geq 8$

④ $X_j \geq 0$

حل $\longrightarrow$ $w^* = 750$ $\quad X_1^* = X_4^* = 0$ $\quad X_2^* = 3$ $\quad X_3^* = 1$

جواب عین قبلی ، چگونه بدون حل می توان گفت ؟

تمرین تشویقی : خلاصه یک مقاله که به کاربرد مدل سازی ریاضی در رژیم غذایی می پردازد (10-15 سال اخیر) 1 صفحه A_4

مسئله برنامه ریزی پرسنل (Work scheduling Prog..) :

یک بیمارستان نیازمند استخدام تعدادی پرسنل تمام وقت است. جدول زیر حداقل پرستار لازم در هر روز کاری را نشان می دهد. طبق قوانین بیمارستان هر پرستار باید 5 روز متوالی کار کند و سپس 2 روز متوالی استراحت کند. می خواهیم ضمن برآوردن نیازها و قوانین بیمارستان، تعداد کل پرستار استخدامی min شود ؟

Subject:
Year. Month. Date. ( )

روز کاری	1	2	3	4	5	6	7
تعداد پرستار لازم	17	13	15	19	14	16	11

X متغیر ~~هدف~~ تصمیم گیری : تعداد پرستار روز i ام : X_i

(روش غلط)

$$Min\ Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_7$$

s.t

(1) $X_1 \geq 17$

(2) $X_2 \geq 13$

...

(7) $X_7 \geq 11$

(8) $X_1, \ldots, X_7 \geq 0$, Int

$\xrightarrow{\text{جواب}}$ $X_1^* = 17$

$X_2^* = 13$

⋮

$X_7^* = 11$

$Z^* = 105$

مشکل عمده ؟؟ تعریف متغیر تصمیم گیری : این متغیرها مستقل از هم هستند و تلفیق دارند (تداخل و وابستگی)

✓ متغیر تصمیم گیری : X_i = تعداد پرستارهایی که شیفت کاری خود را روز i-ام شروع می کنند

$i = 1, \ldots, 7$

(اینها مستقل اند چون هر دسته با دسته دیگر متفاوت است روز کاری اش)

* با تعریف متغیر تصمیم گیری به این صورت در واقع عدم تداخل و استقلال متغیرها تصمیم گیری تضمین می شود.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$
\begin{array}{lllllllll}
(1) & X_1 + & & & + X_4 + & X_5 + & X_6 + & X_7 & \geq 17 \\
(2) & X_1 + & X_2 & & & + X_5 + & X_6 + & X_7 & \geq 13 \\
(3) & X_1 + & X_2 + & X_3 & & & + X_6 + & X_7 & \geq 15 \\
(4) & X_1 + & X_2 + & X_3 + & X_4 & & & + X_7 & \geq 19 \\
(5) & X_1 + & X_2 + & X_3 + & X_4 + & X_5 & & & \geq 14 \\
(6) & & X_2 + & X_3 + & X_4 + & X_5 + & X_6 & & \geq 16 \\
(7) & & & X_3 + & X_4 + & X_5 + & X_6 + & X_7 & \geq 11 \\
(8) & X_j \geq 0, & \underline{Int} & & & & & &
\end{array}
$$

حل $\quad Z^* = 23 \qquad X_1^*, X_2^*, X_6^* = 4, \; X_3^* = 2, \; X_4^* = 6, \; X_5^* = 0, X_7^* = 3$

تعداد پرستار بهینه در هر روز :

روز کاری	1	2	3	4	5	6	7
تعداد بهینه پرستار (سمت چپ محدودیت‌ها)	17	15	17	19	16	16	15
مورد نیاز	17	13	15	19	14	16	11

← هیچ روزی کمبود نداریم.

تمرین تشویقی : قانون : 2 روز کار ، 2 روز استراحت (متوالی)

و در روزهای زوج نیازمند حداقل 15 نفر در روزهای فرد نیازمند 18 پرستار.

برنامه کاری پرستاری ... ؟ $\qquad X_{ij}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مسئله کاستن ضایعات برش : (Trim-loss Problem)

در یک کارخانه کاغذسازی رول ها کاغذ به پهنای استاندارد 20 واحد تولید می شود

طول رول ها کاغذ نیز استاندارد بوده و آنرا L در نظر می گیریم . سفارشات مختلفی که به

این کارخانه می رسد براساس عرض مورد درخواست بریده می شود . هدف مدیریت

کارخانه آن است که سفارشات مورد نظر با کمترین ضایعات بریده شود .

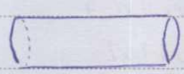
منظور از ضایعات هم دورریز کاغذ و هم تولید کاغذ اضافه بر سفارشات دریافتی است

فرض کنید یک مشتری سفارشات زیر را به کارخانه داده باشد . مطلوب است تعیین

تعداد رول کاغذی که جهت انجام این سفارش باید بریده شود تا کل ضایعات حداقل

شود ؟

شماره سفارش	عرض درخواستی	تعداد رول درخواستی
1	5	150
2	7	200
3	9	300



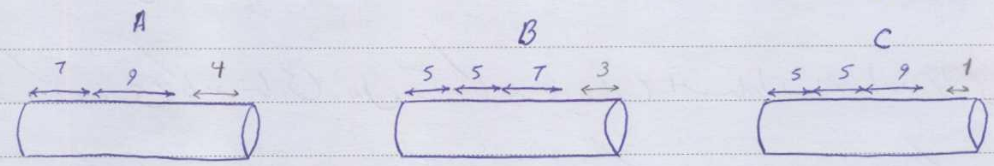
20

اگر مجموع عرض ها 20 بود و تعداد یکسان

← همان تعداد لازم بود

Subject:
Year. Month. Date. ( )

الگوی برش کارخانه :



جهت درک بهتر مسئله ابتدا فرض کنیم (مدیریت کارخانه) 3 الگوی فوق را جهت برش استفاده می کنیم

طرح تولیدی I جهت پاسخ گویی : 300 رول با A + 75 با B

— II — : 200 با A + 100 با C

کدام بهتر است ؟

اول باید ببینیم نیاز مشتری را برطرف می کند ؛ (موجه بودن) بله، هر دو امکان پذیرند

کل مساحت ضایعات	مساحت ناشی از اضافه تولید	مساحت ناشی از دور ریز کاغذ	
$2650L$	$100 \times 7 \times L$ + $75 \times 7 \times L$	$300 \times 4 \times L$ + $75 \times 3 \times L$	طرح I
✓ $1150L$	$50 \times 5 \times L$	$200 \times 4 \times L$ + $100 \times 1 \times L$	طرح II

یا مساحت ضایعات = کل تولید − نیاز

$I: \ 300 \times 20 \times L + 75 \times 20 \times L - 4850L = 2650L$ ✓

$II: \ 200 \times 20L + 100 \times 20 \times L - 4850L = 1150L$ ✓

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حال می خواهیم الگوها (طرح ها) مختلف تولید کنیم.

عرض	1	2	3	4	5	6	~~7~~
5	0	2	2	4	1	0	3
7	1	1	0	0	2	0	0
9	1	0	1	0	0	2	0
ضایعات	4	3	1	0	1	2	

این الگو در ۴ جای بود
در واقع الگوهای دیگر تکراری
خواهند بود.

← طرح ها ؟؟

{ تمرین تشویقی: الگوریتمی بنویسید و اجرا کنید که با توجه به رول داده شده (مثلاً L)
و عرض های مورد درخواست مثلاً (l_1، ...، l_k) بتواند الگوهای برش تولید کند }

X_j: تعداد رول هایی که با الگوی j برش داده می شود.

$Min\ Z =$ کل مساحت ضایعات

کل مساحت ضایعات = کل مساحت تولیدی − کل مساحت مورد نیاز

$$= 20L(X_1 + \cdots + X_6) - L(150 \times 5 + 200 \times 7 + 300 \times 9)$$

$$= \underline{20L(X_1 + \cdots + X_6)} - \underline{4850L}$$

مقادیر ثابت در تعیین جواب بهینه نقش ندارند.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\Rightarrow$ هدف : $\min Z = X_1 + \dots + X_6$

s.t

(1) $2X_2 + 2X_3 + 4X_4 + X_5 \geq 150$

(2) $X_1 + X_2 + 2X_5 \geq 200$

(3) $X_1 + X_3 + 2X_6 \geq 300$

(4) $X_1, \dots, X_6 \geq 0$, Int

اگر = بگذاریم یک شرط اضافی اضافه کرده ایم

که لازم نیست. چون می تواند اضافه تولید هم داشته باشد و اگر جواب همان مساوی

باشد، در این حالت هم بدست می آید.

$37.5 \xrightarrow{\text{گرد پایین}} 37$ جواب فرق می کند

← حل تشویقی : حل با = و $\geq$ و با Int و بدون Int

تمرین تشویقی : در مورد مسئله مورد نظر، تاریخچه آن و روش ها حل و انواع مختلف آن

No Int : 0, 0, 0, 12.5, 100, 150 $Z = 262.5$

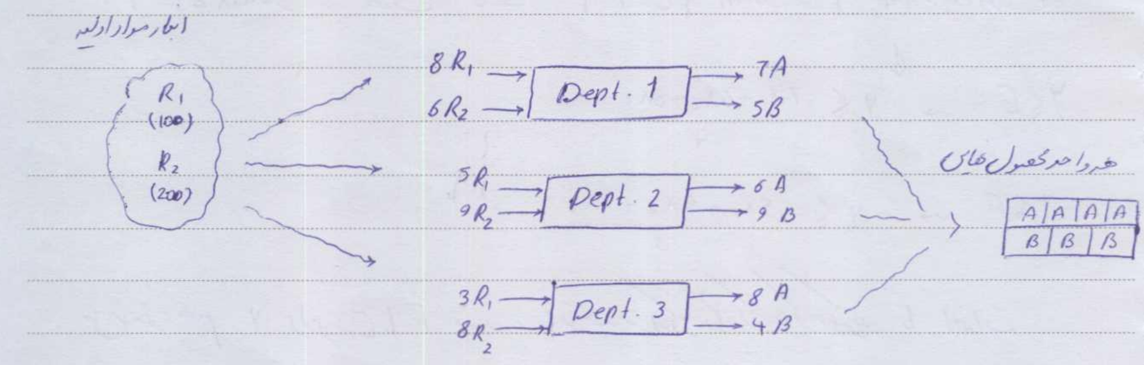
Int : 0, 0, 25, 0, 100, 138 $Z = 263$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Assembly Line Balancing Problem : مسئله متوازن کردن خطوط مونتاژ

فرض کنید در یک کارگاه یک واحد محصول از مونتاژ 4 واحد قطعه A و 3 واحد قطعه B بدست می‌آید. قطعات A و B از مواد خام R_1 و R_2 تولید می‌شوند که به ترتیب 100 واحد و 200 واحد از آن در دسترس است. قطعات A و B در 3 دپارتمان تولیدی تهیه می‌شوند که تعداد قطعات تولیدی آنها بستگی به سیکل تولیدی (Production Cycle) آن دپارتمان در طی روز دارد. تعداد قطعات تولیدی A و B در هر سیکل تولیدی دپارتمان‌ها در نمودار زیر آمده. هدف تعیین تعداد سیکل تولیدی هر دپارتمان جهت max سازی محصول نهایی است.



{ یک محصول باید از 4 مرحله زیر رد شود

قابلیت تولید 50 35 15 60

← کمترین تولید تعیین کننده ← مطلوب نیست ← باید متوازن شود مثلاً 15 ← 45 }

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

x_i : تعداد سیکل تولیدی هر دپارتمان

محدودیت ها : ① $8X_1 + 5X_2 + 3X_3 \leq 100$

② $6X_1 + 9X_2 + 8X_3 \leq 200$

③ $X_1, X_2, X_3 \geq 0$, Int

تعداد کل A تولیدی : $7X_1 + 6X_2 + 8X_3 \xrightarrow{\text{تعداد قطعه A که}} (7X_1 + 6X_2 + 8X_3)/4 = E$

به درد محصول نهایی می خورد

تعداد کل B تولیدی : $5X_1 + 9X_2 + 4X_3 \xrightarrow[\text{تعداد B که ...}]{} (5X_1 + 9X_2 + 4X_3)/3 = F$

تعداد محصول نهایی $= \min\{E, F\}$ ← در قالب مدل سازی چنین تابعی نداریم (باید خطی شود)

هدف :

$$\max Z = \min\left\{\frac{7X_1 + 6X_2 + 8X_3}{4}, \frac{5X_1 + 9X_2 + 4X_3}{3}\right\}$$

محدودیت : ④ $Y = \min\{E, F\}$ ⟵ هدف : $\max Z = Y$

$$Y \leq E \rightarrow Y \leq \frac{7X_1 + 6X_2 + 8X_3}{4}$$

$$Y \leq F \rightarrow Y \leq \frac{5X_1 + 9X_2 + 4X_3}{3}$$

می خواهیم Y برابر E یا F شود، با توجه به اینکه در ماکسیمم کوچکتر باید با اضافه شدن این دو محدودیت .

Subject:
Year. Month. Date. ( )

از کجا بفهمیم Y مساوی E یا F می شود ؟ چون تابع هدف $\max Z = Y$

است، حتماً Y که بدست می آید max مقدار خود را که E یا F است می گیرد.

محدودیت ④
$$\begin{cases} \rightarrow 7X_1 + 6X_2 + 8X_3 - 4Y \geq 0 & \text{(حذف شد)} \\ \rightarrow 5X_1 + 9X_2 + 4X_3 - 3Y \geq 0 & , \quad Y \geq 0 , Int \end{cases}$$

تمرین تشویقی : حل مدل فوق

1. $Y \geq 0 , Int$ 1 7 16 $Y = 44 = Z$

2. $Y \geq 0$ 2 7 15 $Y = ..$

• if: $\max Z = \max\{ .. , .. \} \xrightarrow{How(?)}$

مدل فرآیند تولید : Production Process Model

شرکت عطرسازی طراوت دو نوع عطر بهار و یاس تولید می کند. ماده اولیه مورد نیاز

جهت هر نوع عطر به مبلغ 3 هزار تومان به ازای هر کیلو خریداری می شود.

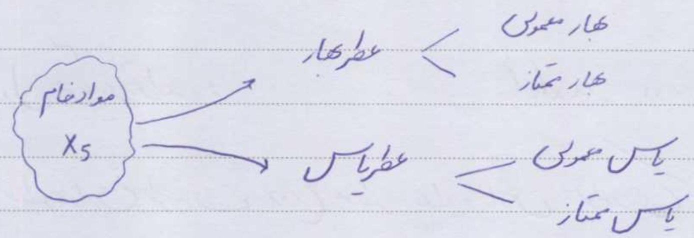
این ماده اولیه سپس به آزمایشگاه ارسال می شود بنحوی که برای هر کیلوی آن،

1 ساعت کار آزمایشگاهی جهت ادامه فرآیند لازم است که درنهایت از هر کیلوی آن

3 گرم عطر بهار معمولی و 4 گرم عطر یاس معمولی تولید می شود. هر گرم بهار معمولی

7 هزار تومان و هر گرم یاس معمولی 6 هزار تومان فروخته می شود.

البته با ادامه فرآیند تولید می توان بهار ممتاز و یاس ممتاز را تولید کرد که به ترتیب هر گرم آنها 18 و 14 هزار تومان قابل فروش است. برای تولید هر گرم بهار ممتاز باید 3h کار آزمایشگاهی اضافی و 4 هزار تومان هزینه اضافی به ازا هر گرم بهار معمولی و برا یاس ممتاز (هر گرم) .. 2h + 4 هزار تومان برای هر گرم یاس معمولی انجام داد. شرکت حداکثر تا 6000 h کار آزمایشگاهی و تا 4000 کیلو ماده خام دارد. می خواهیم برنامه تولید شرکت را با هدف حداکثر سازی سود با مدل LP بدست آوریم.



X_5 = مقدار کیلو ماده خام خریداری شده

X_1 = مقدار گرم تولید عطر بهار معمولی

X_2 = — بهار ممتاز

X_3 = — یاس معمولی

X_4 = — یاس ممتاز

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مقدار کیلو ماده اولیه X_5

$3X_5$ گرم عطر بهار:
- X_1 گرم بهار معمولی
- X_2 گرم بهار ممتاز

$4X_5$ گرم عطر یاس:
- X_3 گرم یاس معمولی
- X_4 گرم یاس ممتاز

رابطه ریاضی :

$$\left.\begin{aligned} X_1 + X_2 &= 3X_5 \\ X_3 + X_4 &= 4X_5 \end{aligned}\right\}$$

روابط تعادلی

$$\text{Max } Z = 7X_1 + (18-4)X_2 + 6X_3 + (14-4)X_4 - 3X_5$$

s.t.

(1) $X_5 \leq 4000 \rightarrow 5000\,[?]$

(2) $3X_2 + \quad + 2X_4 + X_5 \leq 6000$

(3) $X_1 + X_2 - 3X_5 = 0$

(4) $X_3 + X_4 - 4X_5 = 0$

(5) $X_j \geq 0$, ~~Int~~

جواب : $Z^* = 172,666$ هزار تومان $X_1^* = 11333\tfrac{1}{3}$ گرم

$X_2^* = 666\tfrac{2}{3}$ گرم $X_3^* = 16000$ گرم $X_4^* = 0$ گرم

$X_5^* = 4000$ کیلو

برنامه تولید : 4000 کیلو ماده اولیه
- 12000 گرم بهار
  - معمولی $11333\tfrac{1}{3}$
  - ممتاز $666\tfrac{2}{3}$
- 16000 گرم یاس — فقط معمولی

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در محدودیت ها، هر محدودیتی که تساوی را ارضا کند، تعیین کننده است،
ممکن است تغییر در سمت راست آن جواب بهینه را تغییر دهد

مسئله امتزاج : Blending Problem

شرکت ملی نفت ایران 3 نوع بنزین : I، II، III تولید می کند که از طریق مخلوط کردن
3 نوع نفت خام بدست می آید : نفت نوع 1، 2، 3 .
بنزین های تولیدی از نظر نرخ اکتان و میزان گوگرد با هم متفاوت اند :

نوع بنزین	حداقل متوسط نرخ اکتان	حداکثر متوسط درصد گوگرد	تعداد بشکه تقاضا روزانه	قیمت فروش هر بشکه
بنزین I	10	1	3000	70
بنزین II	8	2	2000	60
بنزین III	6	1	1000	50

	نرخ اکتان	درصد گوگرد	قیمت هر بشکه $
نفت 1	12	0.5	45
نفت 2	6	2	35
نفت 3	8	3	25

Subject:
Year. Month. Date. ( )

هزینه تبدیل هر شکه نفت به هر شکه بنزین به طور ثابت 4$ است. شرکت توانایی

تولید روزانه 14000 شکه بنزین را دارد و حداکثر 5000 شکه نفت را می‌تواند استفاده

از هر کدام   هر دلار تبلیغ

کند. هم چنین مدیریت فروش شرکت ادعا می‌کند که به ازای تبلیغ هر نوع بنزین

می‌تواند 10 شکه تقاضای آن نوع بنزین را زیاد کند. برنامه‌ریزی تولید شرکت نفت را

با هدف حداکثر سازی سود خالص بدست آورید.

تعداد شکه نفت نوع i که به بنزین نوع j تبدیل $= X_{ij}$ — تولید

میزان هزینه تبلیغ بنزین نوع i $= a_i$ — هزینه تبلیغات

تصمیم‌گیری

درآمد:

$$\max Z = 70(X_{11}+X_{21}+X_{31}) + 60(X_{12}+X_{22}+X_{32}) + 50(X_{13}+X_{23}+X_{33})$$

$$- \Big[45(X_{11}+X_{12}+X_{13}) + 35(X_{21}+X_{22}+X_{23}) + 25(X_{31}+X_{32}+X_{33})$$

هزینه تولید انواع نفت c_i

هزینه تبدیل — هزینه تبلیغ

$$+ 4(X_{11}+X_{12}+\cdots+X_{33}) + a_1 + a_2 + a_3 \Big]$$

s.t.

فرض: کلیه تولیدها به مصرف تقاضاها می‌رسد

محدودیت‌ها رابطه تولید و تقاضا

$$X_{11}+X_{21}+X_{31} = 3000 + 10a_1$$

$$X_{12}+X_{22}+X_{32} = 2000 + 10a_2$$

$$X_{13}+X_{23}+X_{33} = 1000 + 10a_3$$

PAPCO

irmgn.ir

Subject:

Year. Month. Date. ( )

محدودیت حداکثر میزان تولید بنزین : $X_{11} + X_{12} + \dots + X_{33} \leq 14000$ if: 16000 → زاید

محدودیت میزان شبکه نفت استفاده شده : $X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 5000$

$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 5000$

زاید $X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq 5000$

محدودیت حداقل متوسط نرخ اکتان :

$$\frac{12X_{11} + 6X_{21} + 8X_{31}}{X_{11} + X_{21} + X_{31}} \geq 10$$

هر 3 زاید

غیرخطی هستند ⟸

$$\frac{12X_{12} + 6X_{22} + 8X_{32}}{X_{12} + X_{22} + X_{32}} \geq 8$$

برنامه ریزی ریاضی کند

نه برنامه ریزی خطی

$$\frac{12X_{13} + 6X_{23} + 8X_{33}}{X_{13} + X_{23} + X_{33}} \geq 6$$

← تبدیل به خطی

حداکثر متوسط درصد گوگرد :

$$\frac{\frac{5}{1000}X_{11} + \frac{2}{100}X_{21} + \frac{3}{100}X_{31}}{X_{11} + X_{21} + X_{31}} \leq \frac{1}{100}$$

$$\frac{\frac{5}{1000}X_{12} + \frac{2}{100}X_{22} + \frac{3}{100}X_{32}}{X_{12} + X_{22} + X_{32}} \leq \frac{2}{100}$$

$$\frac{\frac{5}{1000}X_{13} + \frac{2}{100}X_{23} + \frac{3}{100}X_{33}}{X_{13} + X_{23} + X_{33}} \leq \frac{1}{100}$$

تمرین تشویقی : بود و نبودش در جواب بهینه تأثیر ندارد

محدودیت علامت : $X_{ij} \geq 0$, Int

$a_i \geq 0$

1. آیا در مدل محدودیت زاید وجود دارد؟

2. Int , no Int : خروجی

$X_{11} = 2000$ $X_{12} = 2200$ $X_{13} = 800$ $X_{21} = 1000$

$X_{22} = 4000$ $X_{23} = X_{31} = 0$ $X_{32} = 3300$ ← حل ؟

$X_{33} = 200$ $a_1 = a_3 = 0$ $a_2 = 750$ $Z = 287750$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مسئله کنترل موجودی : (Inventory Catntrol)

در یک شرکت قایق سازی متعلق به دوستان؛ تعدادی قایق را در طول فصل های سال تولید می نماید. میزان تقاضاهای شرکت در ابتدای هر سال مشخص می شود و در طی چهار فصل به ترتیب 40 ، 60 ، 75 ، 25 قایق است. شرکت میخواهد کلیه تقاضاها به موقع ارضا شوند. در طی هر فصل شرکت توانایی تولید حداکثر 40 قایق در وقت معمولی دارد که این کار موجب می شود هزینه تولید هر قایق در وقت معمولی 4000000 تومان باشد شرکت هم چنین می تواند کارگران را وادار سازد که در وقت اضافه کاری قایق تولید کنند اما اینکار موجب می شود هزینه تولید هر قایق 4500000 تومان شود. در انتهای هر فصل پس از ارضای تقاضاها قایق های موجود با هزینه 20000 تومان برای فصل بعد نگهداری می شود. با استفاده از LP مشخص کنید این شرکت در هر فصل چه مقدار قایق تولید کند تا کل هزینه اش حداقل شود ؟ (در ابتدای سال 15 قایق در انبار وجود دارد)

مدل دینامیکی (Dynamic Model) یا مدل چند دوره ای (Multiperiod Model)

$\xrightarrow{10}$ فصل 1 $\longrightarrow$ فصل 2 $\longrightarrow$ فصل 3 $\longrightarrow$ فصل 4

Subject:
Year. Month. Date. ( )

این دوره‌ها برهم تأثیر گذارند (انبار و ...)

در یک مدل دینامیکی تعیین روابط ریاضی مابین دوره‌ها مهم است.

موجودی در انتهای فصل t = مقدار تولید در فصل t − تقاضای فصل t + موجودی در انتهای فصل t-1

عادی ، اضافه کاری

X_t : مقدار تولید قایق عادی در فصل t Y_t : اضافه کاری

i_t : تعداد قایق که در فصل t به انبار می‌رود

$$\longrightarrow \quad i_t = (X_t + Y_t) - \underbrace{d_t}_{\text{عدد ثابت}} + i_{t-1}$$

$$Min \quad Z = 4000000(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + 4500000(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)$$
$$+ \; 200000(i_1 + i_2 + i_3 + i_4)$$

s.t. محدودیت‌های تعادل :

$$i_1 = (X_1 + Y_1) + 10 - 40$$
$$i_2 = (X_2 + Y_2) + i_1 - 60$$
$$i_3 = (X_3 + Y_3) + i_2 - 75$$
$$i_4 = (X_4 + Y_4) + i_3 - 25$$

محدودیت نامنفی بودن : $i_t \geq 0 \quad t = 1, 2, 3, 4$

PAPCO

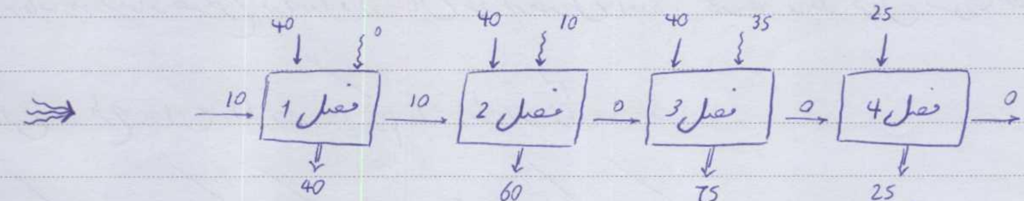
محدودیت تولید در وقت عادی (حداکثر) : $X_t \leqslant 40 \qquad t = 1, 2, 3, 4$

محدودیت علامت : $X_t, i_t, Y_t \geqslant 0, \ Int$

جواب : $X_1^* = X_2^* = X_3^* = 40, \ X_4^* = 25$

$Y_1^* = Y_4^* = 0, \ Y_2^* = 10, \ Y_3^* = 35$

$i_2^* = i_3^* = i_4^* = 0, \ i_1^* = 10 \qquad , \quad Z^* = 784\,500\,000$



می‌خواهیم تا زمانی که تولید در وقت عادی به 40 نرسیده ، اضافه تولید نداشته باشیم :

$X_t < 40 \Rightarrow Y_t = 0 \qquad\qquad \cancel{X_t < 40, \ Y_t > 0}$

اینجا به دلیل وجود تابع هدف که ضریب Y ها بزرگتر از ضریب X هاست ← خود تابع هدف

X را max کرده و بعد سراغ Y می‌رود

اگر تابع هدف نباشد ؟؟ ← محدودیت‌ها ؟ ← تشویقی

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مدل سازی مسائل با استفاده از متغیرهای صفر و یک :

مسئله بودجه بندی سرمایه : Capital budgeting problem

یک شرکت 5 طرح مختلف جهت سرمایه گذاری به نام طرح های I_1 ، I_2 ، I_3 ، I_4 ، I_5 بررسی می کند. مقدار سرمایه شرکت در حال حاضر (سال 0) 40 میلیون تومان و در سال 1 مقدار 20 میلیون تومان است و پیش بینی سود خالص ناشی از هر سرمایه گذاری به همراه سرمایه مورد نیاز هر طرح در ابتدا و در سال بعد در جدول آمده. جهت max کردن سود خالص فعلی چه طرح هایی را انتخاب کنیم تا شرایط زیر برآورده شود :

I) اگر در I_2 سرمایه گذاری کند باید در I_1 هم سرمایه گذاری کند .

II) شرکت نمی تواند همزمان در I_2 و I_4 سرمایه گذاری کند .

III) شرکت حداکثر در 3 طرح می تواند سرمایه گذاری کند .

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
سرمایه مورد نیاز در حال حاضر	11	14	15	5	29
سرمایه مورد نیاز در سال 1	3	6	5	8	14
سود حاصل فعلی هر طرح (NPV)	13	17	14	8	20

PAPCO

با استفاده از روابط اقتصاد مهندسی، همه ارزش ها را به سال ۰ می بریم.

* در مسائلی که باید در مورد انتخاب یا عدم انتخاب یک طرح، گزینه، تصمیم گیری نمائیم از

متغیر صفر و یک (Zero-one Variable) استفاده می کنیم $X_j = \{0, 1\}$

(متغیری گسسته است) طرح I_j انتخاب شود

$$\max \; Z = 13X_1 + 17X_2 + 14X_3 + 8X_4 + 20X_5$$

s.t.

محدودیت (1) $11X_1 + 14X_2 + 15X_3 + 5X_4 + 29X_5 \leq 40$

سرمایه گذاری (2) $3X_1 + 6X_2 + 5X_3 + 8X_4 + 14X_5 \leq 20$

* اگر در طرح I_2 سرمایه گذاری باید در I_1 هم: $X_2 = 1 \rightsquigarrow X_1 = 1$

$X_1 \; ? \; X_2$ $\quad = \quad \leq \quad \geq$ ✓

if $X_2 = 1 \rightarrow X_1 = 1$

if $X_2 = 0 \rightarrow X_1 = 0, 1$

$\rightarrow$ (3) $X_2 \leq X_1$

* شرکت می تواند در I_2 و I_4 همزمان سرمایه گذاری کند:

(4) $X_2 + X_4 \leq 1$

* حداکثر در 3 طرح:

(5) $X_1 + \dots + X_5 \leq 3$

(6) $X_j = (0, 1)$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تمرین تشویقی : 1. حل کنید با lingo .

$x_1 = x_2 = x_3 = 1$
$x_4 = x_5 = 0$

2. حل مدل با محدودیت ها جدید :

$x_2 \leq x_1 + x_3$

سرمایه گذاری در I_2 منوط به اینکه در I_1 یا I_3 سرمایه گذاری کرده باشیم (جانشین (4))

همان جواب <=

وقتی هم I_2 و I_4 انتخاب شود، دیگر طرح I_3 انتخاب نشود (")
(همزمان)

$x_2 + x_4 + x_3 \leq 2$

* این مدل برنامه ریزی خطی نیست. خطی پیوسته است اما این مدل گسسته است .

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مسئله کوله پشتی : Knapsack Problem

هنگام صعود به کوه جهت تجدید اعصاب ، کوله پشتی شما توانایی حمل حداکثر 14 kg بار را دارد. با توجه به محدودیت وزنی کوله ، می خواهید از این 8 قلم جنسی که برای صعود نیاز دارید ، اقلام ارزشمندتر را انتخاب نمائید. برای این منظور به هر قلم جنس یک ارزش عددی را در مقیاس [0-20] طبق جدول ، اختصاص می دهید ، با برنامه ریزی مشخص کنید چه اقلامی بیاورید؟

شماره	1	2	3	4	5	6	7	8
وزن (kg)	5	4	3	6	7	9	8	2
ارزش عددی	17	16	20	18	14	19	15	12

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{جنس } j \text{ام انتخاب} \\ 0 & \end{cases}$$

$$\text{Max } Z = 17X_1 + 16X_2 + 20X_3 + 18X_4 + 14X_5 + 19X_6 + 15X_7 + 12X_8$$

s.t.

① $5X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 6X_4 + 7X_5 + 9X_6 + 8X_7 + 2X_8 \leq 14$

$X_j = (0, 1)$

* مسئله کوله پشتی یک مسئله ی تک محدودیتی است ⇐ جواب های موجه را به راحتی پیدا می کنیم

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* مسئله بهینه سازی ترکیبی (COP) Combinatorial Optimization Problem :

مسئله‌ای است که در آن تعداد جواب‌های موجه خیلی زیاد یا ده است و یافتن

جواب بهینه به دلیل گستردگی فضای موجه کار ساده‌ای نیست.

مثلاً در این مسئله در کل 2^8 جواب وجود دارد (۰ یا ۱) می‌توانیم همه را امتحان کنیم تا

جواب‌های موجه بدست آید. (اما با زیاد شدن تعداد متغیرها خیلی سخت می‌شود)
2^n

ارزش هر وزن از هر جنس :

3.4 4 6.6 3 2 2.1 1.8 6

$X_3 = 1$ (هر وزن ارزش بیشتر) ⟵ حداکثر وزن باقیمانده : $14-3=11$

$X_8 = 1$ $11-2=9$ باقی

$X_2 = 1$ $9-4=5$

$X_1 = 1$ $5-5=0$ ⟹ $(1,1,1,0,0,0,0,1)$

$Z = 65$

تمرین تشویقی : آیا جواب بدست آمده از روش فوق برای مسئله کوله‌پشتی همواره جواب

بهینه است؟ نه

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای حل مسائل COP در دهه ها اخیر روش ها متعددی موسوم به «روش های متاهیوریستیک» (Metaheuristic) توسعه پیدا کرده که این روش ها جواب های را تولید می کند که هم موجه اند و هم بسیار نزدیک به نقطه بهینه (حتی ممکن است نقطه بهینه نیز باشند) و هم بسیار سریع اند. از جمله روش ها [illegible] می توان به

الگوریتم ژنتیک (Genetic Algorithm) = GA ، الگوریتم کلونی مورچگان
ACO = (Ant Colony Optimazation) ، الگوریتم جستجوی ممنوع (Tabu Search) = TS

* علم ژنتیک به مطالعه قوانین توارث در موجودات زنده می پردازد. بر مبنای این قوانین از ترکیب کروموزوم های پدر و مادر که خود از ژن های مختلفی تشکیل شده است، کروموزوم فرزند به وجود می آید که برخی از ژن های آن مشابه پدر یا مادر است.

در مسئله کوله:

45 $X_1^{(1)} = (1,1,0,0,0,0,0,1)$

27 $X_2^{(1)} = (0,0,0,0,0,0,1,1)$

$X_3 = $ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 38

X_4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | غیرموجه

(روش معاوضه)

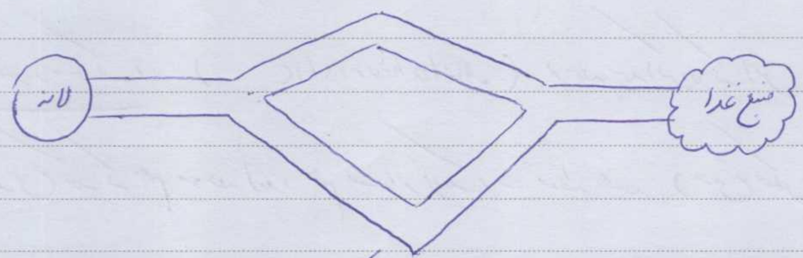
جواب ها جدید که ممکن است موجه نباشند

تمرین تشویقی : طراحی و اجرای یک الگوریتم GA برای حل مسئله کوله

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ACO



مورچه ها وقتی از لانه خارج می شوند دسته ای از راه کوتاه و دسته ای از راه طولانی می روند . تعدادی که از راه کوتاه تر رفته اند زودتر باز می گردند و از مورچه ها بعدی به علت تراکم ماده ها ترشح شده . تعداد زیادی ، مسیر کوتاه را برمی گزینند و به تدریج تعداد مورچه ها راه کوتاه زیاد می شود .

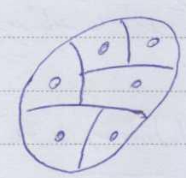
Subject:

Year. Month. Date. ( )

مسئله پوشش مجموعه : Set Covering Problem

سازمان آتش نشانی استان تهران طرح احداث ایستگاه های آتش نشانی را در 6 منطقه شهری در دست بررسی دارد. در جدول زیر فواصل مراکز این مناطق نسبت به هم داده شده سازمان می خواهد یا در هر مرکز، ایستگاه باشد و یا در فاصله حداکثر 15 سا آن ایستگاه موجود باشد و درضمن، کل تعداد ایستگاه های تأسیس شده، حداقل شود. مدل برنامه ریزی برای رسیدن به این هدف؟

	2	3	4	5	6
منطقه 1	10	20	30	30	20
منطقه 2		25	35	20	10
3			15	30	20
4				15	25
5					14



$$X_j = \begin{cases} 1 & \leftarrow \text{اگر ایستگاه در مرکز منطقه } j \text{ احداث شود} \\ 0 & \end{cases}$$

$$\min\ Z = X_1 + \cdots + X_6$$

s.t.

(1) $X_1 + X_2 \geq 1$ — یا در خود 1 باید باشد یا در فاصله کمتر از 15 سا آن

(2) $X_1 + X_2 + X_6 \geq 1$

(3) $X_3 + X_4 \geq 1$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(4) $X_3 + X_4 + X_5 \geq 1$

(5) $X_4 + X_5 + X_6 \geq 1$

(6) $X_2 + X_5 + X_6 \geq 1$

(7) $X_j = (0,1)$

* اگر یک x ی بود که با 1 بودن همه شرط‌ها را ارضا کند جواب 1 می‌شد اما وجود ندارد

* دوتا وجود دارد؟

حل: $X_4 , X_2 \Leftarrow$ $X_1^* = X_3^* = X_5^* = X_6^* = 0$ $\quad Z^*=2 \quad X_2^* = X_4^* = 1$

تمرین تشویقی: یک مقاله یا تحقیق کاربردی در زمینه این مسئله با ذکر مأخذ + خلاصه ؟

مسئله هزینه ثابت : Fixed charge Problem

در یک کارگاه برای راه اندازی ماشین آلات نیاز به یک هزینه ثابت است که مستقل از مقدار محصولات تولیدی با ماشین آلات مورد نظر است و هزینه راه اندازی نامیده می‌شود. بنابراین تولید هر محصول از دو بخش هزینه‌ای تشکیل می‌شود. هزینه ثابت (k) و هزینه متغیر که بستگی به مقدار محصول تولیدی دارد.

در جدول، هزینه ثابت (k_j) و هزینه متغیر (c_j) وابسته به هر واحد از 3 نوع محصولی که در کارگاه ساخته می‌شود به همراه میزان ماده اولیه و ساعت کار مورد نیاز داده شده، کارخانه حداکثر 160 ماده اولیه و حداقل 150 ساعت کار دارد. حداقل‌سازی کل هزینه؟

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

	ماده اولیه	ساعت کار	k_j	c_j
محصول 1	4	3	200	6
2	3	2	150	4
3	4	6	100	8

در این مسئله برای یک محصول مورد نیاز مثلاً محصول j متغیر تصمیم گیری :

$X_j =$ تعداد محصول نوع j

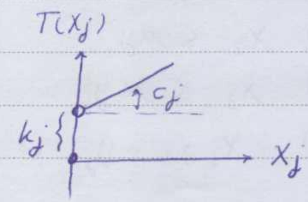
هزینه تولید X_j واحد $\quad T(X_j) = \begin{cases} k_j + c_j X_j & X_j > 0 \\ 0 & X_j = 0 \end{cases}$

$$\text{Min} \quad z = \sum_j T(x_j)$$

s.t.

(1) $3X_1 + 2X_2 + 6X_3 \geq 150$

(2) $4X_1 + 3X_2 + 4X_3 \leq 160$



در این مسئله تولید یا عدم تولید به دلیل تابع هدف یک متغیر مهم است ⇐ متغیر وابسته y_j

تعریف : $\quad y_j = \begin{cases} 1 & \text{از محصول j تولید داشته باشیم} \\ 0 & \text{— نداشته —} \end{cases}$

می خواهیم : $\quad X_j > 0 \Rightarrow y_j = 1 \qquad X_j = 0 \rightarrow y_j = 0$

جهت تبدیل روابط ↑ به محدودیت ، داریم :

if: $X_j \leq y_j \rightarrow$ ✗ →

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$X_j \leq M y_j$ — M = یک عدد بسیار بزرگ مثبت

$(0,1)$

$X_j > 0 \Rightarrow$ عدد مثبت $\leq M y_j \Longrightarrow y_j = 1$ → هدف : $c_j X_j + k_j$

$X_j = 0 \Rightarrow 0 \leq M y_j \Longrightarrow y_j = 1 \rightarrow k_j$; $y_j = 0 \rightarrow 0$ ⟼ تابع هدف درست می شد

چون min مدل است.

$\Rightarrow$ تابع هدف : $\text{Min } Z = (6X_1 + 200y_1) + (4X_2 + 150y_2) + (8X_3 + 100y_3)$

s.t.

3. $X_1 \leq M y_1$
4. $X_2 \leq M y_2$ → M ها را باید تعیین کنیم
5. $X_3 \leq M y_3$ — مثلاً 60 ، ...
6. $X_i \geq 0 ,\ y_j - (0,1)$

تمرین تشویقی : به ازای مقادیر مختلف M حل ؟ کمترین M ؟

$X_1 = Y_1 = X_2 = Y_2 = 0 \quad Y_3 = 1 \quad X_3 = 25 \quad Z = 300$

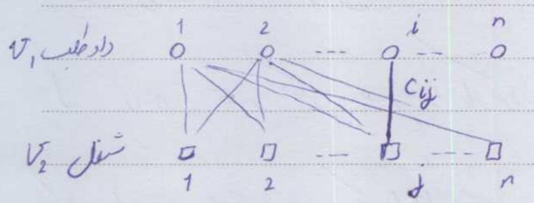
Min برای M : 25

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مسئله تخصیص (کارگماری): Assignment Problem

در یک سازمان، n شغل موجود است. جهت تصدی این n شغل، n داوطلب مراجعه می کنند که هر یک توانایی انجام هر یک از مشاغل مذکور را دارند. می خواهیم به هر داوطلب یک شغل و به هر شغل یک داوطلب به نحوی تخصیص یابد. اگر هزینه تخصیص شکل داوطلب i به شغل j را c_{ij} بنامیم، تخصیص داوطلبان به مشاغل چگونه باشد تا کل هزینه تخصیص حداقل شود؟



هر یال در گراف فوق بین یکی از اعضای V_1 و یکی از اعضای V_2 است و بین هیچ یک از اعضای V_1 (یا V_2) به تنهایی یال نداریم ← گراف دوبخشی

+ اینجا تمام یال های ممکن با این دو مجموعه V_1 و V_2 موجود است ← گراف دوبخشی کامل

+ به هر یال هزینه (وزن) c_{ij} اختصاص می یابد ← گراف دوبخشی کامل وزن دار

تعداد جواب های موجه: $n!$

متغیر تصمیم گیری: $x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{داوطلب } i \text{ به شغل } j \text{ اختصاص} \\ 0 & \end{cases}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\text{Min } Z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

s.t.

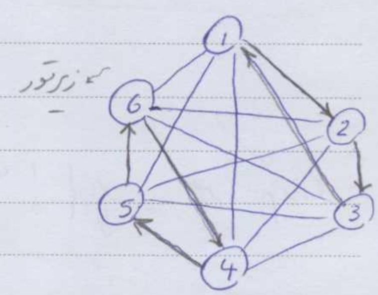
هرکدام n تا محدودیت ← ① $\sum_j x_{ij} = 1$ $i = 1, 2, \ldots, n$,   ② $\sum_i x_{ij} = 1$ $j = 1, 2, \ldots, n$

③ $x_{ij} = (0, 1)$

Traveling Salesman Problem (TSP) : مسئله فروشنده دوره گرد

یک فروشنده دوره‌گردی خواهد از شهر خودش (شهر 1) شروع کرده و پس از بازدید از (n-1) شهر دیگر به شهر مبدأ بازگردد. او ی خواهد در هر یک از شهرهای مذکور فقط یکبار وارد و خارج شود. اگر فاصله شهر i تا شهر j را d_{ij} فرض کنیم که جزء اطلاعات مسئله داده شده باشد. می خواهیم تور با <u>کمترین</u> مسافت را که در آن فروشنده از شهر خودش شروع کرده و پس از بازدید از تمام (n-1) شهر دیگر به شهر مبدأ با توجه به شرایط گفته شده بازگردد را بیابیم.

d_{ij}	1	2	3	4	5	6
1	x	10	21			
2		x				
3			x			
4				x		
5					x	
6						x



Subject:
Year. Month. Date. ( )

✓ جواب های موجه زیادی وجود دارند. در یک مسئله با n شهر می توان $(n-1)!$

جواب جهت بازدید از تمام شهرها داشت ← مسئله از نوع COP است.

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{از شهر } i \text{ به شهر } j \text{ برود} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\min Z = \sum_i \sum_j d_{ij} X_{ij}$$

s.t

(I) $\sum_i X_{ij} = 1$ (به هر شهر یکبار وارد) $j = 1, 2, 3, \dots, n$

(II) $\sum_j X_{ij} = 1$ (از هر شهر ۱ بار خارج) $i = 1, 2, 3, \dots, n$

؟ آیا با این محدودیت ها به جواب بهینه می رسد؟

با احتمال کم می توان رسید و آن وقتی است که محدودیت های بعدی زاید باشند

می خواهیم جواب های مثل جواب زیر صدق نکند:

$X_{12} = X_{23} = X_{31} = 1$

$X_{64} = X_{45} = X_{56} = 1$

* اگر جوابی در مسئله TSP داشته باشیم که در دسته محدودیت های (I) و (II) صدق کند

اما تشکیل یک تور کامل را ندهد (مثل از بازدید از $(n-1)$ شهر به شهر ۱ بازگردد)،

به آن زیر تور (Sub tour) گویند.

برای مدل سازی مسئله TSP نیاز به محدودیت های هستیم که مانع ایجاد زیر تور شود که به آنها

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

محدودیت حذف زیرتور (Subtour Elimination Constraint) گویند.

زیرتور شهرها را به حداقل 2 مجموعه تقسیم می‌کند. قسمتی که 1 را شامل می‌شود Q

و بقیه را $\bar{Q}$ می‌نامیم. اگر حداقل 1 یال بین Q و $\bar{Q}$ ها باشد مشکل حل می‌شود:

V کل شهرها : $Q+\bar{Q}=V$

(3) $\sum_{i\in Q}\sum_{j\in \bar{Q}} x_{ij} \geq 1$ → تعداد : 2^n-2 (زیاد!) * ϕ و V نمی‌شود

تمرین تشویقی : روش‌های نوشتن حذف زیرتور +

به کارگیری آن در یک مدل TSP با هفت شهر ← مرجع ز:

* با توجه به محدودیت‌های 1 و 2 می‌توان تعدادی را هم حذف کرد اما وقتی n بزرگ است

و 2^n نمایی است چندان تأثیری ندارد.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Either-Or Constraint : فعال / غیرفعال شدن یک محدودیت از بین دو محدودیت

گاهی اوقات در مدل سازی می خواهیم محدودیت های داشته باشیم که در آن از بین دو محدودیت I و II در هر زمان یکی به صورت محدودیت فعال و دیگری به صورت محدودیت زاید درآید:

$$\begin{cases} f(x_1,\dots,x_n) \leq b_1 & \text{I} \\ g(x_1,\dots,x_n) \leq b_2 & \text{II} \end{cases}$$

برای این منظور از متغیر ۰ و ۱ y کمک می گیریم: $y = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} f(x_1,\dots,x_n) \leq b_1 + My & \text{I} \\ g(x_1,\dots,x_n) \leq b_2 + M(1-y) & \text{II} \end{cases}$$

$y=1 \Rightarrow$ II فعال، I زاید $y=0 \Rightarrow$ I فعال، II زاید

$f_1 \leq b_1 + My_1$
$\vdots$
$f_t \leq b_t + My_t$

اگر بخواهیم k تا از t فعال شود ؟؟ $y_1 + \dots + y_t = t-k$

فرم های استاندارد و کانونی مسئله LP :

تعریف: در فرم کانونی (Canonical Form) مسئله برنامه ریزی خطی 3 شرط زیر باید برقرار:

1. تمام متغیرها مسئله غیرمنفی هستند.

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

2. تمام محدودیت ها به صورت ≥ هستند.

3. تابع هدف به صورت max است.

* هر مسئله LP را می توان به صورت فرم کانونی نوشت.

✓ به صورت کانونی؟

$\min\ z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$

s.t.

(1) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 4$

(2) $2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 5$

(3) $x_2 - 5x_3 = 4$

(4) $|3x_1 + 5x_2 - 6x_3| \leq 6$

(5) $x_1, x_2 \geq 0$, x_3 urs ⟶ unrestricted In Sign

هر عدد را می توان به صورت تفاضل دو عدد مثبت نوشت:

$x_3 \rightarrow x_3^+ - x_3^-$

$x_3^+, x_3^- \geq 0$

همه جا به جای x_3، $x_3^+ - x_3^-$ می گذاریم

$\Rightarrow$ (5) ⟶ $x_1, x_2, x_3^+, x_3^- \geq 0$

تابع هدف $\xrightarrow{\times(-)}$ $\max\ z = -3x_1 - 4x_2 - 5(x_3^+ - x_3^-)$

(1) ⟶ $x_1 + 2x_2 + 3(x_3^+ - x_3^-) \leq 4$

(2) ⟶ $\times(-)$ ⟶ $-2x_1 - 3x_2 + (x_3^+ - x_3^-) \leq -5$

(3) ⟶ $x_2 - 5(x_3^+ - x_3^-) \leq 4$

⟶ $-x_2 + 5(x_3^+ - x_3^-) \leq -4$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

4

$$3X_1 + 5X_2 - 6(X_3^+ - X_3^-) \leq 6$$
$$-3X_1 - 5X_2 + 6(X_3^+ - X_3^-) \leq 6$$

if $|\cdots| \geq 6 \Rightarrow$ $\cdots \geq 6$ یا $-\cdots \geq 6$ $\longrightarrow$ $y = \{^{0}_{1}$

در فرم استاندارد برنامه‌ریزی خطی: باید 3 شرط زیر برقرار باشند:

1. تمام متغیرهای مسئله غیرمنفی هستند.

2. تمام محدودیت‌های مسئله (به جز محدودیت علامت) بصورت تساوی اند.

3. تمام مقادیر سمت راست محدودیت‌ها غیرمنفی اند ($\forall i: b_i \geq 0$)

* هر مسئله LP به فرم استاندارد قابل تبدیل است.

اگر در یک مسئله محدودیتی به صورت $a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n \leq b$ وجود داشت شرط دوم

چگونه برقرار می‌شود؟

برای تبدیل محدودیت فوق به صورت تساوی از متغیری به نام متغیر کمکی (Slack Variable)

استفاده می‌شود. به این ترتیب که: $a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n + S = b$

S متغیر است چون معلوم نیست مقدارش چند است

$$S = b - (a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n) \qquad S \geq 0$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر محدودیتی به صورت $a_1X_1 + \dots + a_nX_n \geq b$ وجود داشت شرط دوم چگونه برقرار ؟

$\rightarrow -a_1X_1 - \dots - a_nX_n \leq -b \rightsquigarrow$

$-a_1X_1 - \dots - a_nX_n + S = -b$ ✗

چون معمولاً مقادیر سمت راست b در مسئله اولیه غیرمنفی است با توجه به شرط سوم نمی‌توان از روش فوق استفاده کرد.

برای تبدیل نامساوی فوق به حالت تساوی از متغیری به نام متغیر مازاد (Surplus Variable) استفاده می‌شود، بدین ترتیب که :

$a_1X_1 + \dots + a_nX_n - E = b$

$E = (a_1X_1 + \dots + a_nX_n) - b \rightarrow E \geq 0$

مثال : فرم استاندارد ؟

$Max\ z = 10X_1 + 15X_2$

s.t.

① $X_1 \leq 100$ ② $X_2 \leq 100$

③ $50X_1 + 35X_2 \leq 4000$

④ $20X_1 + 15X_2 \geq 2000$

⑤ $X_1, X_2 \geq 0$

شرط 1 برقرار است.

① $\rightarrow X_1 + S_1 = 100$

② $\rightarrow X_2 + S_2 = 100$

(3) → $50X_1 + 35X_2 + S_3 = 4000$

(4) → $20X_1 + 15X_2 - E_1 = 2000$

(5) $X_1, X_2 \geq 0$ ، $S_1, S_2, S_3, E_1 \geq 0$

1 و 2 و 3 و 4 تشکیل یک دستگاه معادلات می دهند :

متغیرها : 6تا   تعداد معادلات : 4 ⇐ این دستگاه بی شمار جواب دارد

⇐ جواب هایی که همه + نیستند حذف می کنیم . حل و رسیدن به یک جواب ؟

ترکیب محدب (Convex Cambination) از دو نقطه X_1 و X_2 عبارتست از :

یک نقطه نظیر X بطوریکه : $X = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$

$0 \leq \lambda \leq 1$

⇐ از لحاظ هندسی، ترکیب محدب دو نقطه مجموعه تمام نقاط پاره خطی که این دو نقطه را بهم متصل می کند است.

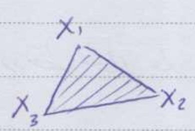
⇐ ترکیب محدب 3 نقطه :

$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$

$0 \leq \lambda_i \leq 1$

هندسی : نقاط رو و توی مثلث :



Subject:
Year. Month. Date. ( )

* ترکیب محدب n نقطه :

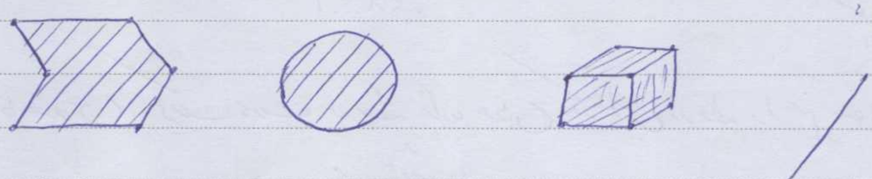
$$X = \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n$$
$$\sum \lambda_i = 1$$
$$\lambda_i \geq 0$$

مجموعه محدب : به مجموعه S مجموعه محدب (Convex Set) گفته می شود اگر به ازای هر دو نقطه ی دلخواه $X_1 , X_2 \in S$ داشته باشیم :

$$\forall \; X_1 , X_2 \in S \; : \; \begin{cases} \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \\ 0 \leq \lambda \leq 1 \end{cases} \in S$$

هندسی : پاره خطی که هر دو نقطه از مجموعه را به هم وصل می کند داخل مجموعه .

مثال :



محدب   محدب   محدب   غیر محدب

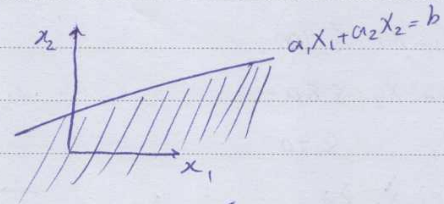
در یک مجموعه محدب نظیر S ، به نقطه X نقطه گوشه (Extreme Point) گوییم اگر نتوان آن را به صورت ترکیب محدب دو نقطه متمایز S نوشت .

* هر نقطه ی غیر گوشه در یک مجموعه محدب را می توان به صورت ترکیب محدب نقاط گوشه متمایز نوشت .

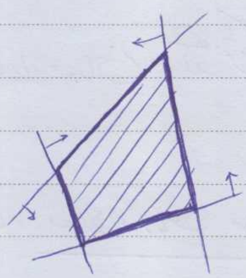
Subject:
Year. Month. Date. ( )

* به هر نامعادله به صورت $a_1x_1+\dots+a_nx_n \leq b$ یک نیم‌فضا (Half Space) گوییم. چون مجموعه تمام نقاط فضا را به دو زیرمجموعه تقسیم می‌کند.

$a_1x_1+a_2x_2 \leq b$:



در مسئله‌های LP ، ناحیه تشکیل از محدودیت‌ها در واقع ناحیه‌ای است که از اشتراک مابین تعدادی محدود نیم‌فضا تشکیل می‌شود:



اگر محل تقاطع تعداد محدودی نیم‌فضا تشکیل یک مجموعه محدب را دهد به آن چندوجهی محدب (Convex Polyhedron) گویند.

*  مجموعه محدب است اما چندوجهی محدب نیست.

* مکعب چندوجهی محدب است که از ۶ عدد نیم‌فضاها (که شامل وجه‌ها هستند)

*

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل ترسیمی مسائل برنامه‌ریزی خطی با دو متغیر اصلی :

- $Min\ Z = 3X_1 + 2X_2$

s.t.

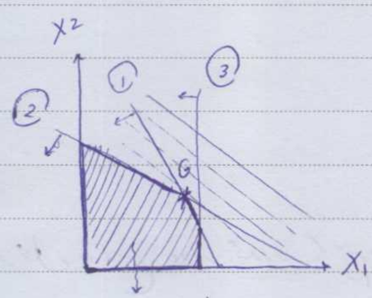
① $2X_1 + X_2 \leq 100$

② $X_1 + X_2 \leq 80$

③ $X_1 \leq 40$

④ $X_1 , X_2 \geq 0$ $\longrightarrow G(20,60)$

هنگامی که دو متغیر اصلی نظیر X_1 ، X_2 در مسئله وجود داشته باشند می‌توان نیم فضاهای مربوط به محدودیت‌ها را در فضای دو بعدی ترسیم کرد :



S : ناحیه موجه

طبق تعریف ، فضای / ناحیه موجه (Feasible Space / region)

در یک مسئله LP عبارت از مجموعه تمام نقاطی که در همه محدودیت‌های مسئله (اصلی + علامت) صدق کند.

هر نقطه متعلق به فضای موجه در واقع یک نقطه / جواب موجه است : Feasible Solution

* هر جواب موجه مسئله LP که بهترین مقدار تابع هدف را تولید کند جواب بهینه (Optimal Solution) نامیده می‌شود .

برای $Z=400$ خط $3X_1+2X_2$ را رسم و ...

* در یک مسئله LP با تابع هدف max (min) ، خطوط موازی هم که به ازای تخصیص مقادیر مختلف به تابع هدف به دست می آید خطوط هم سود (خطوط هم هزینه) گویند.

Iso-cost Lines   Iso-profit Lines

برای یافتن جواب بهینه مسئله LP در حالت ترسیمی ، می توان خطوط هم سود را به نحوی رسم کرد که بیشترین مقدار z را از بین نقاط موجه مسئله LP مشخص کند

قضیه : ناحیه موجه که به صورت $S=\{X|AX\leq b,\ X\geq 0\}$ تشکیل یک مجموعه محدب را می دهد.

فرم کانونی

اثبات : فرض کنید دو نقطه X_1 و X_2 متعلق به مجموعه S وجود دارند، در اینصورت:

$$X_1\in S \Rightarrow \begin{cases} AX_1\leq b \\ X_1\geq 0 \end{cases} \qquad X_2\in S \Rightarrow \begin{cases} AX_2\leq b \\ X_2\geq 0 \end{cases}$$

$$\times\lambda \downarrow \qquad\qquad \times(1-\lambda)\downarrow$$

$$\begin{cases} A\lambda X_1\leq \lambda b \\ \lambda X_1\geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A(1-\lambda)X_2\leq b(1-\lambda) \\ (1-\lambda)X_2\geq 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} \begin{cases} A[\lambda X_1+(1-\lambda)X_2]\leq \lambda b+(1-\lambda)b \\ \lambda X_1+(1-\lambda)X_2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A[\overbrace{\lambda X_1+(1-\lambda)X_2}^{X}]\leq b \\ \underbrace{\lambda X_1+(1-\lambda)X_2}_{X}\geq 0 \end{cases}$$

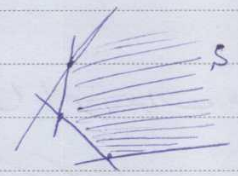
$$\Rightarrow X\in S \Rightarrow \lambda X_1+(1-\lambda)X_2\in S \rightarrow \text{محدب}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* یک چند وجهی محدب محدود گویند اگر از یک نقطه دلخواه موجه در درون فضای موجه مربوط به آن در هر سمتی حرکت کنیم یک نیم فضا وجود دارد که مانع پیشروی ما خواهد شد.

در واقع یک نیم فضای محدود کننده در هر سمتی از چندوجهی وجود دارد.

* چندوجهی محدب نامحدود:



اینجا نقاط گوشه می توانند مستقیمی از کل را بدهند

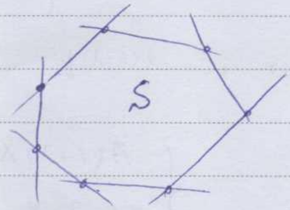
* در یک چند وجهی محدب محدود، هر نقطه غیر گوشه را می توان به صورت ترکیب محدب نقاط گوشه چندوجهی محدب نوشت.

قضیه) در یک مسئله LP به صورت زیر اگر فضای S محدود باشد، در اینصورت جواب بهینه در صورت وجود در حداقل یکی از گوشه ها اتفاق می افتد.

LP : $\max Z = CX$

$AX \leq b$

$X \geq 0$



اثبات: از فضاهای کلی قبلی می دانیم که فضای S یک چندوجهی محدب است و با توجه به شرایط مسئله، محدود است. فرض کنید که مجموعه نقاط گوشه S به صورت زیر:

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فرض کنید جواب بهینه {نیم فضاها محدودند} ← $P = \{X_1^*, \dots, X_t^*\}$

مسئله LP Y^* باشد. اگر $Y^* \in P$، قضیه اثبات شده. پس فرض کنید $Y^* \notin P$

<= می توان به صورت ترکیب محدب نقاط گوشه عضو P نوشت:

$$Y^* = \sum \lambda_i X_i^*$$

$$\sum \lambda_i = 1 \qquad Z^* = CY^* \implies Z^* = C \sum \lambda_i X_i^*$$

$$\lambda_i \geq 0 \qquad \Rightarrow Z^* = \sum_i C \lambda_i X_i^* \quad \text{I}$$

حال از بین t نقطهٔ گوشه فرض کنید که نقطه X_p^* بهترین تابع هدف را تولید می کند:

$$\max_{i \in P} [CX_i^*] = CX_p^* \implies CX_i^* < CX_p^* \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, t \\ i \neq p \end{matrix}$$

(= هم می شود اما یکی کافی است) $i = p \to CX_p^* = CX_p^*$

$$0 \leq \lambda_i \leq 1 \xrightarrow[\text{می شه}]{\text{جهت عوض}} \underline{\sum C \lambda_i X_i^*} < \sum C \lambda_i X_p^* \xrightarrow{\text{I}} Z^*_{Y^*} < \sum C \lambda_i X_p^*$$

$$\implies Z^*_{Y^*} < CX_p^* \underbrace{\sum \lambda_i}_{1} \implies Z^*_{Y^*} < CX_p^* \implies Z^*_{Y^*} < Z^*_{X_p^*}$$

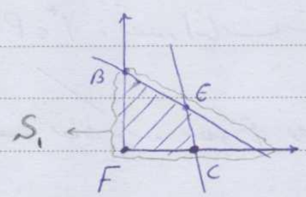
← تناقض با اینکه Y^* بهینه است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تعیین نقاط گوشه فضای موجه به صورت جبری :

Max $z = 4x_1 + 3x_2$
s.t.

① $x_1 + x_2 \le 40$
② $2x_1 + x_2 \le 60$
③ $x_1, x_2 \ge 0$



↓ استاندارد

① $x_1 + x_2 + S_1 = 40$
② $2x_1 + x_2 + S_2 = 60$
③ $x_1, x_2, S_1, S_2 \ge 0$

* هر جوابی که از طریق حل دستگاه معادلات مربوط به فرم استاندارد با توجه به غیر- بودن متغیرها بدست می‌آید درحقیقت یک نقطه موجه از فضای S است. پس نقطه گوشه فضای S نیز که در واقع یک نقطه موجه است باید به طریق از روی جوابها مربوط به حل دستگاه معادلات ناشی ممکن شود.

تعریف: در سیستم معادلات $AX = b$ که فرض می‌شود دارای m معادله و n متغیر ($m < n$) یک جواب پایه (Basic Solution) بدین صورت بدست می‌آید که مقدار $n-m$ متغیر را مساوی صفر فرض کرده و دستگاه m معادله و m متغیر حاصل را به شرط داشتن جواب حل می‌کنند.

دترمینان ماتریس ضرایب $\neq 0$ ← ستونهای وابسته به m متغیر، مستقل خطی باشند

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل مثال قبل :

$n = 4$

$m = 2$: تا را صفر قرار می دهیم ←

$S_1 = S_2 = 0 \Rightarrow$ $X_1 + X_2 = 40$
$2X_1 + X_2 = 60$

$$\begin{array}{cc} X_1 & X_2 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \text{مستقل}$$

معادل نقطه E در فضای موجه : $(20, 20, 0, 0)$ ← $\Rightarrow X_1 = X_2 = 20$

تعریف : به m متغیر موجود در یک جواب پایه‌ای که از حل دستگاه معادلات m متغیر و m معادله بدست می آید متغیرهای پایه‌ای (Basic Variables) و به $(n-m)$ متغیری که صفر فرض شده‌اند متغیرهای غیر پایه‌ای (NonBasic Variables) گفته می شود. مجموعه متغیرهای پایه‌ای را با X_B ، مجموعه متغیرهای غیر پایه‌ای را با X_N نشان می دهیم

$$X_B = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \qquad X_N = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}$$

به ماتریس $m \times m$ که به وسیله ضرایب متغیرهای پایه‌ای بدست می آید ماتریس پایه‌ای (Basic Matrix) گویند : B . به ماتریسی که به وسیله متغیرهای غیر پایه‌ای بدست می آید ماتریس غیر پایه‌ای (Non basic Matrix) گویند : N ، $(m \times (n-m))$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

X_B	X_N	(X_1, X_2, S_1, S_2)	نقطه گوشه
X_1, X_2	S_1, S_2	$(20, 20, 0, 0)$	E ✓
S_1, S_2	X_1, X_2	$(0, 0, 40, 60)$	F ✓
X_2, S_1	X_1, S_2	$(0, 60, -20, 0)$	D ✗

تعریف: در یک جواب پایه‌ای حاصل از حل دستگاه معادلات هنگامی که کلیه مقادیر متغیرها غیرمنفی باشند به آن جواب پایه‌ای موجه (Basic Feasible Solution) یا به اختصار BFS گویند. در محدودیت علامت صدق کند

* هر BFS وابسته به یک نقطه گوشه فضای موجه است و بالعکس.

X_2, S_2	X_1, S_1	$(0, 40, 0, 20)$	B ✓
X_1, S_1	X_2, S_2	$(30, 0, 10, 0)$	C ✓
X_1, S_2	X_2, S_1	$(40, 0, 0, -20)$	A ✗

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$LP \begin{cases} Max\ Z = CX \\ AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

متغیرها به 2 بخش : $X = \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow \quad [B \cdot N] \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} = b \Longrightarrow BX_B + NX_N = b$$

$$X_N \equiv 0 \Longrightarrow BX_B = b \Longrightarrow \boxed{X_B = B^{-1} b}$$

$$X_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow X_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

الگوریتم حل مسئله LP :

1. از یک BFS اولیه شروع می کنیم (اگر کد داشته باشیم ، بهتر است کدها را XB انتخاب)

← F بدست می آید ، می خواهیم از F به C, B برسیم.

تعریف : به دو BFS مجاور (همسایه) هم گفته می شود اگر در یک مسئله LP با m محدودیت ،

n متغیر دارای (m-1) متغیر پایه مشترک باشند . دو BFS مجاور هم وابسته به دو نقطه ی گوشه

مجاور در فضای موجه می باشند . فقط یک متغیر پایه متفاوت دارند

2. به یکی از BFS ها مجاور می رویم .

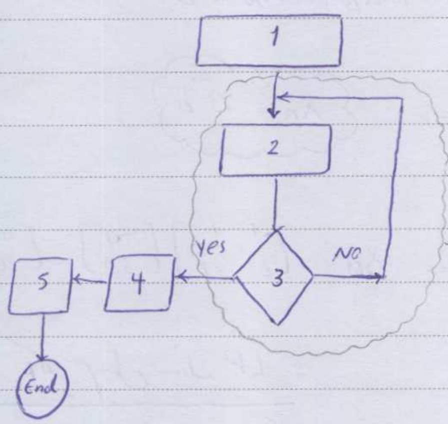
$$B \leftarrow E \leftarrow C \leftarrow F$$

PAPCO

3. آیا همه BFS ها بررسی شده اند؟

3 Yes

4. مقادیر تابع هدف BFS را یافتن → 5. جواب بهینه را مشخص



عیبش کند زمان

مزیت: حتماً جواب بهینه یک مسئله LP را درصورت وجود تولید می کند.

تعداد دفعات اجرای حلقه موجود در الگوریتم:

″ تعداد BFS های موجود در یک مسئله LP

″ در بدترین حالت (حداکثر): $\binom{n}{m}$ → وقتی همه BFS در بیایند

تمرین تشویقی: یک مسئله LP طراحی کنید که در آن تمام جواب های پایه ای BFS شوند با این شرط که 1) $m \geq 5$, $n \geq 7$ 2) $d_A \geq 40\%$

$d_A = \dfrac{\text{تعداد عناصر غیرصفر}}{\text{تعداد کل عناصر}}$ = چگالی ماتریس ✓

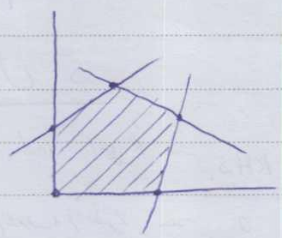
الگوریتم سیمپلکس : Simplex Algorithm

الگوریتم سیمپلکس توسط G. Dantzig برای حل مسائل LP طراحی شد.

در این الگوریتم سعی می شود هر BFS جدید که مجاور BFS قبلی است به نحوی تولید شود که همواره مقدار تابع هدف را نسبت به جواب قبلی بدتر نکند.

شرط موجه بودن

شرط بهینگی



* Simplex نوعی خاص از ترکیب محدب است.

بردارها

مثال :

$$\max Z = 4X_1 + 3X_2$$

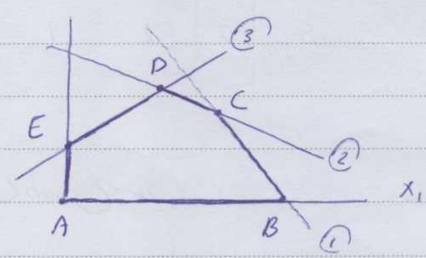
s.t.

$$\text{①}\quad 2X_1 + 3X_2 + S_1 = 6$$

$$\text{②}\quad -3X_1 + 2X_2 + S_2 = 3$$

$$\text{③}\quad 2X_1 + X_2 + S_3 = 4$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$



پایه : $S_1 \quad S_2 \quad S_3$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = B \qquad X_B = B^{-1} b$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\Rightarrow \quad X_B = Ib = b$

* اگر در یک مسئله برنامه ریزی خطی همه‌ی محدودیت ها اولیه به صورت $\leq$ باشند

که با اضافه کردن متغیرهای Slack در فرم استاندارد به صورت $=$ درآیند، در اینصورت

برای یافتن BFS اولیه در الگوریتم سیمپلکس از متغیرهای پایه $X_B = \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_m \end{pmatrix}$ استفاده می‌کنیم

* تمام محاسبات مربوط به الگوریتم S در جدولی به نام جدول Simplex انجام می‌شود.

جدول S:

A نقطه گوشه	Z	X_1	X_2	S_1 (X_3)	S_2 (X_4)	S_3 (X_5)	RHS → Right Hand Side
Z	1	-4	-3	0	0	0	0 → سطر تابع هدف / سطر Z
S_1	0	2	3	1	0	0	6
S_2	0	-3	2	0	1	0	3
سطر ← S_3	0	2	1	0	0	1	4

همواره به این صورت

* تابع هدف مسئله نیز به صورت یک معادله نشان داده می‌شود:

$$Z = C_1X_1 + \cdots + C_nX_n \rightarrow Z - C_1X_1 - \cdots - C_nX_n = 0$$

* اگر فرض کنیم متغیرهای مسئله (متغیرهای اصلی / اضافی / مازاد) به صورت $X_1, \ldots, X_n$

نام گذاری شوند ستون ضرایب وابسته به هر متغیر X_j در محدودیت ها a_j نامگذاری می‌شود

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثلاً: $y_1 = \begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$ $\quad y_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

* عنصر موجود در i-امین ردیف ستون y_j را به صورت y_{ij} نگهداری می‌کنیم

$y_{22} = 2 \qquad y_{13} = 1 \qquad y_{34} = 0$

* عناصر موجود در ستون RHS وابسته به هر متغیر پایه در واقع مقدار آن متغیر پایه در جدول مربوط است.

$S_1 = 6 \qquad S_2 = 3 \qquad S_3 = 4$

✓ در جدول شروع این مقادیر در واقع مقادیر سمت راست محدودیت های باشند. $b = \begin{pmatrix}6\\3\\4\end{pmatrix}$

بردار ستونی وابسته به مقادیر متغیرهای پایه را به صورت $\bar{b} = \begin{pmatrix}\bar{b}_1\\ \vdots \\ \bar{b}_i \\ \vdots \\ \bar{b}_m\end{pmatrix}$ نمایش می‌دهیم.

در جدول شروع $X_B = b = \bar{b}$ $\qquad \bar{b}_1 = 6 \qquad \bar{b}_2 = 3 \qquad \bar{b}_3 = 4$

* برای ضرایب وابسته به متغیر x_j در سطر z (سطر تابع هدف) نام $z_j - c_j$ استفاده می‌شود:

$z_2 - c_2 = -3$

$z_5 - c_5 = 0$

$z_1 - c_1 = -4$

✓ در جدول شروع: $z_j - c_j = -c_j$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

متغیر وارد شونده به پایه (The Entering Variable) : یکی از متغیرهای غیرپایه تکرار فعلی است که قرار است در تکرار بعد وارد پایه شود و به وسیله شرط بهینگی (Optimality Condition) تعیین می شود.

شرط بهینگی : متغیری نظیر x_k جهت ورود به پایه انتخاب می شود که در یک مسئله به فرم Max دارای $Min\{z_j-c_j \mid z_j-c_j<0\} = z_k-c_k$ (اگر Min باشد مثبت ترین در بین مثبت ها)

منفی ترین در بین منفی ها

متغیر خارج شونده از پایه : یکی از متغیرهای پایه ـــ از پایه خارج شود و به وسیله شرط موجه بودن (Feasibility Condition) تعیین ← The Leaving V

(Max و Min فرقی نمی کند)

شرط موجه بودن :

$$\begin{aligned} &(1)\quad 2X_1 + S_1 = 6 && S_1 = 6-2X_1 \\ &(2)\quad -3X_1 + S_2 = 3 \quad \longmapsto && S_2 = 3+3X_1 \\ &(3)\quad 2X_1 + \cancel{X_4}\, S_3 = 4 && S_3 = 4-2X_1 \end{aligned}$$

← به دستگاه مثلاً (با اطلاعات جدید)

با ورود X_1 به داخل پایه و با توجه به تابع هدف (Max) می خواهیم حتی الامکان X_1 بزرگتر شود. یعنی X_1 تا جایی بزرگتر شود که سایر متغیرها منفی نشوند.

حدود $\Rightarrow$ $X_1 \le \frac{6}{2}=3$, $X_1 \le 4/2=2$ $\Rightarrow X_1=2 \longrightarrow S_3=0$ $\quad S_1 , S_2 > 0$

$\downarrow$

جهت خروج از پایه انتخاب می شه

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

شرط موجه بودن: فرض کنید متغیر x_k به عنوان متغیر ورودی انتخاب شده باشد در این صورت

متغیر x_r به عنوان متغیر خروجی از پایه انتخاب می شود اگر:

$$\min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \,\middle|\, y_{ik}>0\right\} = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$$

* به محاسبه $\min\{\ \}$ تست نسبت (Ratio Test) گویند.

$\min\{\frac{6}{2}, -, \frac{4}{2}\} = 2 \Longrightarrow S_3$ خروجی

* اگر در تست نسبت، $y_{ik} \le 0$ باشد یعنی مسئله دارای جواب ∞ است =

جواب بی کران (Unbounded Solution)

B عقبه	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	0	-1	0	0	2	8
S_1	0	0	2	1	0	-1	2
S_2	0	0	$3\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$	9
X_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	2

$\times 3 + R_2$

دستگاه معادلات طوری بازنویسی می شود که به جای S_3، X_1 متغیر پایه باشد. (در معادله سوم

ضریبش ۱ و در بقیه ۰ شود):

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

③ $X_1 + \frac{1}{2} X_2 + \frac{1}{2} S_3 = 2$

② $3\frac{1}{2} X_2 + S_2 + \frac{3}{2} S_3 = 9$

① $2X_2 + S_1 - S_3 = 2$

هدف : ⓪ $Z - X_2 + 2S_3 = 8$ — می‌خواهیم X_1 فرض شود پایه

$\longrightarrow$ $X_1 = 2$ $X_2 = 0$ $S_1 = 2$ $S_2 = 9$
$S_3 = 0$ $Z = 8$

نکته : محل تقاطع ورودی و خروجی = عنصر پاشنه = عنصر لولا

* وقتی متوقف می‌شویم که دیگر متغیری برای ورود به پایه نیابیم.

$$I = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & X_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

با توجه به شرط بهینگی (منفی‌ترین در منفی‌ها) ← ورودی : X_2

شرط موجه بودن : $Min \{ \frac{2}{2} , \frac{9}{3\frac{1}{2}} , \frac{2}{\frac{1}{2}} \} = 1 \Rightarrow S_1$ خروجی

P4PCO

نقطه c	z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	0	0	$1/2$	0	$3/2$	9
X_2	0	0	1	$1/2$	0	$-1/2$	1
S_2	0	0	0	$-7/4$	1	$13/4$	$11/2$
X_1	0	1	0	$-1/4$	0	$3/4$	$3/2$

* چون تمام $z_j - c_j$ ها مثبت هستند، پس به جدول بهینه رسیده‌ایم.

* اگر روش معمولی را به کار ببریم، باید همه BFS ها را بررسی می کردیم

* ضرایب متغیرهای پایه در محدودیت ها 1 است. "ضریب متغیرهای پایه در سطر z 0 است."

خلاصه روش سیمپلکس برای یک مسئله استاندارد با تابع هدف max :

1. یک BFS اولیه را انتخاب می کنیم. برای این منظور:

الف) اگر مسئله اصلی به فرم کانونی بود در این صورت کلیه متغیرهای کمکی $S_1, \dots, S_m$ که جهت تبدیل به فرم استاندارد استفاده شده‌اند به عنوان BFS اولیه استفاده می شوند.

ب) اگر به دلیل وجود محدودیت های به شکل ≤ یا = در مسئله اصلی امکان تشخیص BFS اولیه وجود نداشت در این صورت باید از روش هایی نظیر روش M بزرگ (Big M Method) یا روش دو فاز (Two Phase Method) استفاده می شود. (بعدا)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

2. انتخاب متغیر ورودی به پایه از طریق شرط بهینگی: در این صورت متغیر X_k جهت ورود به پایه انتخاب می شود اگر $Z_k - C_k = \min\{Z_j - C_j \mid Z_j - C_j < 0\}$.

شرط توقف: اگر $Z_j - C_j \geq 0$ ، $\forall j$ ، حل بهینه است و متوقف می شویم.

3. انتخاب متغیر خروجی از پایه از طریق شرط موجه بودن (تست نسبت) در اینصورت متغیر X_r برای خروج از پایه انتخاب می شود اگر: $\min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \mid y_{ik} > 0\right\} = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$

اگر $y_{ik} < 0 \quad : \forall i$ جواب مسئله بی کران است.

4. تکرار جدید الگوریتم با جایگزینی متغیر X_k در داخل پایه و خروج متغیر X_r از داخل پایه فعلی و انجام عملیات سطری - مقدماتی (روش گوس - جردن) جهت تعیین مقادیر جدید عناصر و جدول جدید و بازگشت به گام 2.

مثال:

$\text{Max } Z = 60X_1 + 30X_2 + 20X_3$

s.t.

(1) $8X_1 + 6X_2 + X_3 \leq 48$

(2) $4X_1 + 2X_2 + \frac{3}{2}X_3 \leq 20$

(3) $2X_1 + \frac{3}{2}X_2 + \frac{1}{2}X_3 \leq 8$

(4) $X_2 \leq 5 \rightsquigarrow$ زائد $\qquad X_1, \ldots, X_4 \geq 0$

حل کنید $\longrightarrow$ $Z^* = 280 \quad X_1^* = 2 \quad X_2^* = 0 \quad X_3^* = 8$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\max Z = 60X_1 + 30X_2 + 20X_3$$
s.t.

(1) $8X_1 + 6X_2 + X_3 + S_1 = 48$

(2) $4X_1 + 2X_2 + \frac{3}{2}X_3 + S_2 = 20$

(3) $2X_1 + \frac{3}{2}X_2 + \frac{1}{2}X_3 + S_3 = 8$

$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

	Z	✓ X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	-60	-30	-20	0	0	0	0
S_1	0	8	6	1	1	0	0	48
S_2	0	4	2	3/2	0	1	0	20
✓ S_3	0	2	3/2	1/2	0	0	1	8

	Z	X_1	X_2	✓ X_3	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	0	15	-5	0	0	30	240
S_1	0	0	0	-1	1	0	-4	16
✓ S_2	0	0	-1	1/2	0	1	-2	4
X_1	0	1	3/4	1/4	0	0	1/2	4

	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	0	5	0	0	10	10	280
S_1	0	0	-2	0	1	0	-8	24
X_3	0	0	-2	1	0	2	-4	8
X_1	0	1	5/4	0	0	-1/2	3/2	2

$\longrightarrow$ $X_1^* = 2$

$X_3^* = 8$

$X_2^* = 0$

$Z^* = 280$ ✓

PAPCO

35.5

Subject:

Year. Month. Date. ( )

Subject:
Year. Month. Date. ( )

شکل ماتریسی جدول Simplex :

$$* \quad \max\ z = CX \qquad \max\ z = [C_B\ \ C_N]\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix}$$

$$AX = b \quad \rightsquigarrow \quad [B, N]\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} = b$$

$$X \geq 0 \qquad X_B, X_N \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\rightsquigarrow \quad * \quad \max\ z = C_B X_B + C_N X_N \qquad X_N = 0 \Rightarrow BX_B = b$$

$$\begin{cases} BX_B + NX_N = b \\ X_B, X_N \geq 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \boxed{X_B = B^{-1} b}$$

$$(X_N = 0) \Longrightarrow \boxed{Z = C_B B^{-1} b}$$

$$\checkmark\ BX_B + NX_N = b \xrightarrow{B^{-1}} \underbrace{B^{-1}B}_{I} X_B + B^{-1}NX_N = \underbrace{B^{-1}b}_{\bar{b}}$$

$$\Rightarrow X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N = B^{-1}b - B^{-1} \underbrace{\sum_{j \in NBV} a_j x_j}_{\text{ضرب ماتریس}}$$

$$\Rightarrow X_B = B^{-1}b - \sum_{j \in NBV} B^{-1} a_j x_j \qquad \text{فرض} : \ y_j = B^{-1} a_j$$

$$\Rightarrow X_B = B^{-1}b - \sum_{j \in NBV} y_j x_j$$

$$\checkmark\ \text{هدف} : \quad z = C_B X_B + C_N X_N \longrightarrow z - C_B X_B - C_N X_N = 0 \Rightarrow$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$x_B = B^{-1}b - \sum \ldots$ جانگذاری $\rightsquigarrow$ $z - c_B(B^{-1}b - \sum B^{-1}a_j x_j) - c_N x_N = 0$

$$\Rightarrow z - c_B B^{-1} b + \sum_{j \in NBV} c_B B^{-1} a_j x_j - c_N x_N = 0 \quad \Rightarrow z - c_B B^{-1} b + \sum_{j \in -} c_B B^{-1} a_j x_j - \sum_{j \in -} c_j x_j = 0$$

$$z = c_B B^{-1} b - \sum_{j \in NBV} (c_B B^{-1} a_j - c_j)\, x_j$$

فرض : $z_j = c_B B^{-1} a_j$

$$\Rightarrow z = c_B B^{-1} b - \sum_{j \in NBV} (z_j - c_j)\, x_j$$

		x_j
	z	$z_j - c_j$
x_B	x_{B_1}	y_{1j}
	x_{B_2}	y_{2j}
	$\vdots$	$\vdots$
	x_{B_m}	y_{mj}

y_j

* نسبت تغییر در تابع هدف به ازای یک واحد تغییر در متغیر غیرپایه‌ی x_j

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = x_j$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x_j} = -(z_j - c_j)} \Rightarrow$$

هر عددی که زیر متغیر در سطر z نوشته می‌شود قرینه‌ی نسبت ... است. (شرط بهینگی را بیان)

✓ ورود متغیرهای غیرپایه به پایه تأثیری روی متغیرهای پایه می‌گذارد ؟؟ yes

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* سمت تغییر در متغیرهای پایه به ازای 1 واحد تغییر در متغیر غیرپایه x_j = $-y_j = \dfrac{\partial x_B}{\partial x_j}$

* سمت تغییر در i امین متغیر پایه به ازای یک واحد تغییر در متغیر غیرپایه x_j = $-y_{ij} = \dfrac{\partial x_{B_i}}{\partial x_j}$

* اگر بخواهیم مقادیر موجود در بردار سمت راست b را تغییر دهیم در این صورت:

$$\partial z/\partial b = \underbrace{C_B}_{1\times m}\underbrace{B^{-1}}_{m\times m} \Rightarrow \partial z/\partial b \quad 1\times m \quad \text{why?}$$

چون باید به ازا همه محدودیت ها باشد. (بردار سطری)

مثال:

$$\text{Max } Z = -X_1 - X_2 + 4X_3$$

s.t.
1. $X_1 + X_2 + 2X_3 + \underline{X_4} = 9$
2. $X_1 + X_2 - X_3 + \underline{X_5} = 2$
3. $-X_1 + X_2 + X_3 + \underline{X_6} = 4$

$X_1, \dots, X_6 \geq 0$

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	RHS
Z	1	0	4	0	1	0	2	17
X_1	0	1	$-1/3$	0	$1/3$	0	$-2/3$	$1/3$
X_5	0	0	2	0	0	1	1	6
X_3	0	0	$2/3$	1	$1/3$	0	$1/3$	$13/3$

$\partial z/\partial b$

B^{-1}

$$X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$X_B = B^{-1} b = B^{-1} \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 6 \\ 13/3 \end{pmatrix} \qquad Z = C_B \underbrace{B^{-1} b} = (-1, 0, 4) \begin{pmatrix} 1/3 \\ 6 \\ 13/3 \end{pmatrix} = 17$$

$$y_2 = B^{-1} a_2 = B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2 \\ 2/3 \end{pmatrix} \qquad y_6 = B^{-1} a_6 = B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$Z_2 - C_2 = C_B \underbrace{B^{-1} a_2}_{y_2} - C_2 = (-1, 0, 4) \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2 \\ 2/3 \end{pmatrix} - (-1) = 4$$

* جدول بهینه بوده است .

* مثلاً می‌خواهیم به یک BFS دیگر برویم :

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = -(z_j - c_j)$$

$$\rightarrow \quad \partial z / \partial x_2 = -4 \qquad \partial z / \partial x_4 = -1 \qquad \partial z / \partial x_6 = -2$$

⇐ با ورود به پایه تابع هدف را بدتر می‌کند ⇐ جواب بهینه است و لازم نیست .

* مثلاً اگر x_2 وارد پایه شود :

$$\frac{\partial X_B}{\partial x_2} = -y_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2 \\ -2/3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightsquigarrow \dfrac{\partial x_1}{\partial x_2} \\ \rightsquigarrow \dfrac{\partial x_5}{\partial x_2} \\ \rightsquigarrow \dfrac{\partial x_3}{\partial x_2} \end{matrix}$$

* با ورود x_6 به پایه $x_1 \uparrow$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* به $C_B B^{-1}$ ضرب سیمپلکس می‌گوییم.

$$\frac{\partial z}{\partial b} = C_B B^{-1} = (-1, 0, 4)\, B^{-1} = (\underbrace{1}_{\partial z/\partial b_1}, \underbrace{0}_{\partial z/\partial b_2}, \underbrace{2}_{\partial z/\partial b_3})$$

نشان می‌دهد محدودیت‌ها 1 و 3 به حد خود رسیده‌اند اما هنوز در محدودیت 2 جا دارد که متغیرها اضافه شوند.

$$(Y_4, Y_5, Y_6) = B^{-1}(a_4, a_5, a_6) = B^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

* همواره ستون‌های زیر متغیرهای کمکی B^{-1} را مشخص می‌کنند.

* اگر محدودیت‌های اصلی مسئله به صورت $\leq$ باشند، در این صورت با اضافه شدن متغیرهای کمکی $(S_1, \ldots, S_m)$ به فرم استاندارد تبدیل شده و ستون‌های وابسته به آنها در جدول سیمپلکس $(\underbrace{Y_{S_1}, Y_{S_2}, \ldots, Y_{S_m}}_{I})$ تشکیل B^{-1} می‌دهند.

$$(z_4 - c_4, z_5 - c_5, z_6 - c_6) = C_B B^{-1}(a_4, a_5, a_6) - (c_4, c_5, c_6) = C_B B^{-1}$$

* ضرب سیمپلکس در مسئله فوق در واقع $z_j - c_j$ متغیرهای کمکی است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

*** شکل ماتریسی Simplex :

#	x_j ($z_j - c_j$)	RHS
Z	$C_B B^{-1} a_j - c_j$	$C_B B^{-1} b$
X_B	$B^{-1} a_j$	$B^{-1} b$

* همه اطلاعات را داریم. با دانستن متغیرهای پایه B ، ⟸ B^{-1} را محاسبه.

شرط بهینگی روش Simplex :

$$Z = C_B B^{-1} b - \sum_{j \in NBV} (z_j - c_j) x_j$$

→ می‌خواهیم از بین متغیرهای غیرپایه تکرار فعلی متغیری وارد پایه شود که در مسئله Max ، بیشترین تغییر در تابع هدف به وجود آورد ، که معادل منفی‌ترین $z_j - c_j$ است.

$$\max_{j \in NBV} \left[\frac{\partial z}{\partial x_j} \right] = \max \left[-(z_j - c_j) \right]$$

شرط موجه بودن (Feasiblity Condition) :

فرض کنید متغیر X_k در یک تکرار جهت ورود به پایه انتخاب شده است. حال می‌خواهیم متغیر خروجی از پایه را تعیین کنیم.

		X_k	
	Z		
X_B	X_{B_1} ⋮ X_{B_m}		$B^{-1} b$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$X_B = B^{-1}b - \sum_{j \in NBV} y_j x_j \xrightarrow{x_k \text{ به پایه}} X_B = B^{-1}b - y_k X_k$$

اگر i امین متغیر پایه فعلی یعنی X_{B_i} مقدار این متغیر عبارتست از:

$$X_{B_i} = (B^{-1}b)_i - y_{ik} X_k$$

X_k قرار است پس از ورود به پایه غیرمنفی باشد، هم چنین سایر متغیرهای پایه فعلی را منفی نکند پس:

$$\begin{cases} \forall i: & X_{B_i} \geq 0 \\ & X_k \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (B^{-1}b)_i - y_{ik} X_k \geq 0 \\ X_k \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_k \leq \dfrac{(B^{-1}b)_i}{y_{ik}} \Big|_{y_{ik} > 0} \\ X_k \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{از Min هم بزرگتر}} \min \left\{ \dfrac{\overbrace{(B^{-1}b)_i}^{\bar{b}}}{y_{ik}} \,\Big|\, y_{ik} > 0 \right\}$$

«تست نسبت»

* در روش Simplex از BFS فعلی موجود سعی می شود به BFS همسایه حرکت کند به نحوی که مقدار تابع هدف بدتر نشود.

irmgn.ir

Subject:

Year. Month. Date. ( )

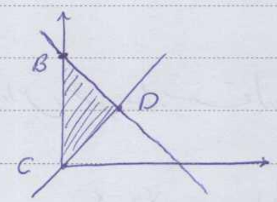
$\max Z = 5X_1 + 2X_2$

s.t.

(1) $X_1 + X_2 + S_1 = 6$

(2) $X_1 - X_2 + S_2 = 0$

$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$



X_B	X_N	X_1, X_2, S_1, S_2	نقطه گوشه
(S_1, S_2)	(X_1, X_2)	0, 0, 6, 0	C
(X_1, S_1)	(X_2, S_2)	0, 0, 6, 0	C
(X_2, S_1)	(X_1, S_2)	0, 0, 6, 0	C

* باید n-m تا 0 (اینجا 2 تا) وجود داشته باشد اما اینجا زیاد است (3 تا)، نمی‌توان تشخیص داد کدام غیرپایه ای بوده!

* اگر در یک BFS مسئله LP مقدار حداقل یکی از متغیرهای پایه ای 0 شود به آن BFS تباهیده می‌نامند (Degenerate BFS)

* در یک BFS تباهیده تعداد 0 های موجود > n-m .

در D : S_1, S_2 غیرپایه X_1, X_2 پایه اما در C چه طور؟

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

؟ کدام 2 تا → X_1 , X_2 , S_2 پایه ای S_1 $C(0,0,6,0)$

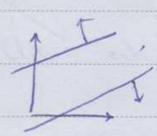
این BFS محل برخورد 3 نیم فضاست
(تناظر 1-1 هنوز برقرار است)

* در BFS های تباهیده ، یک BFS تباهیده به یک نقطه گوشه فضای موجه وابسته است.

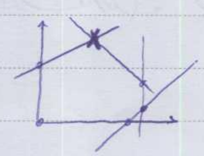
اما در یک BFS تباهیده ترکیب های متفاوتی از متغیرها در مجموعه متغیرهای پایه وجود دارد.

به عبارت دیگر در یک BFS غیرتباهیده ترکیب مجموعه متغیرهای پایه منحصر به فرد است.

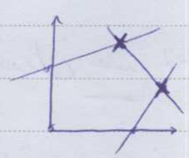
** هنگامی که برای حل یک مسئله LP از روش Simplex استفاده می کنیم ، حالات نادر ممکن است اتفاق بیفتد :



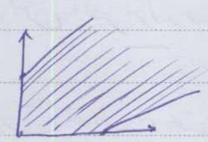
I) مسئله LP دارای جواب نباشد (فضای موجه تهی باشد)



II) دارای جواب بهینه منحصر به فرد است :



III) دارای جواب های بهینه چندگانه است.



IV دارای جواب بیکران است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

؟ این حالت‌ها در روش Simplex چگونه قابل تشخیص اند ؟

I) هنگام حل مسئله به روش S ، BFS اولیه تشکیل نمی شود (با استفاده از روشهای 2 فاز و M-بزرگ)

II) هنگام حل مسئله با روش S و در بررسی شرط توقف برای BFS فعلی (در Max)

$\forall j \in NBV : z_j - c_j > 0 \qquad z_{\text{فعلی}} = C_B B^{-1} b - \sum_{j \in NBV} \underbrace{(z_j - c_j)}_{>0} x_j$

III Alternative Optimal Solution : دراین حالت حداقل دو BFS متفاوت وجود دارد که مقدار بهینه تابع هدف را تولید می کند. (دو BFS متفاوت از نظر ترکیب و مقادیر متغیرها متفاوت اند). از جمله مواردی که این حالت اتفاق می افتد هنگامی است که :

اگر در جدول بهینه (مسئله Max) یک مسئله به ازای حداقل یک متغیر غیرپایه نظیر x_k داشته باشیم : $z_k - c_k = 0$ و این متغیر بتواند در تکرار بعد وارد پایه شود و حالت تباهیدگی وجود نداشته باشد دراین صورت جواب بهینه چندگانه خواهیم داشت.

حالت تباهیدگی وقتی وجود دارد که حداقل یکی از $\bar{b}$ها 0 باشد.

Opt. Solution

	X_k	
	0	$\boxed{\ }$
X_{B_1}		≥ 0
$\vdots$		≥ 0
X_{B_m}		≥ 0

$\Rightarrow$

Z		$\boxed{\ }$
X_{B_1}		
X_k		
X_{B_m}		

$Z_{new} = Z_{old} - (Z_k - C_k)\, X_k \rightarrow$ تغییر می‌کند

چگونه می‌فهمیم BFS جدید تولید شده؟ مقدار مثبت سمت راست بر یک + تقسیم شده

$\max\ Z = 4X_1 + 14X_2$

s.t.

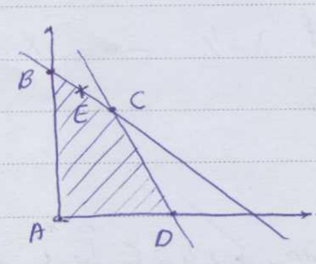
(1) $2X_1 + 7X_2 + S_1 = 21$

(2) $7X_1 + 2X_2 + S_2 = 21$

$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$

C	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	0	0	2	0	42
X_2	0	1	$7/45$	$-2/45$	$7/3$
X_1	1	0	$-2/45$	$7/45$	$7/3$

B	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	1	0	0	2	0	42
X_2	0	$2/7$	1	$1/7$	0	3
S_2	0	$45/7$	0	$-2/7$	1	15



BFS ها متفاوت است اما Z^* یکی است.

محدودیتی که به صورت $a_1x_1+\dots+a_nx_n \leq b$ در مسئله اصلی بوده و با جایگذاری مقادیر بهینه به صورت $a_1x_1^*+a_2x_2^*+\dots+a_nx_n^*=b$ ارضا شود را محدودیت مقید (Binding constant) گویند. (که وابسته$^*=0$)

* در حالت جواب بهینه چندگانه در مسئله max محدودیت مقیدی وجود دارد که منطبق بر یکی از خطوط هم سود شود. (به ازای همه BFS های بهینه مقید است)

* در مثال بالا دو BFS بهینه داریم:

$$B\begin{cases}x_1^*=0\\x_2^*=3\end{cases}\qquad C\begin{cases}x_1^*=7/3\\x_2^*=7/3\end{cases}$$

(ولی بی‌شمار جواب غیرپایه‌ای موجه بهینه)

ترکیب محدب آنها:

$$X=\lambda\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}+(1-\lambda)\begin{pmatrix}7/3\\7/3\end{pmatrix}\qquad 0\leq\lambda\leq 1$$

این ترکیب محدب در واقع پاره خط واصل مابین نقاط گوشه B و C است.

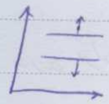
$$\text{if: } \lambda=1/2 \Rightarrow X=1/2\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}+1/2\begin{pmatrix}7/3\\7/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7/6\\8/3\end{pmatrix}: E \qquad Z_E=42$$

$\Rightarrow$ E نقطه بهینه است.

در نقطه E مقادیر متغیرها به صورت $(7/6,\ 8/3,\ 0,\ 15/2)$ است. نقطه E در واقع یک جواب غیرپایه‌ای موجه ولی بهینه است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* در حالت جواب بهینه چندگانه، تعداد BFS های متفاوت بهینه محدود است اما دارای بیشمار جواب های غیر پایه‌ای موجه بهینه هستیم.



* در جواب چندگانه محدودیتی موازی با z است اما برعکس درست نیست:

مثال:

(Max)

	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS	
z	0	0	0	2	10	جواب به چه صورت؟
x_1	1	0	2	1	2	(2,0,0,0)
x_2	0	1	$\boxed{3}$	2	0	تباهیده!

	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS	
z	0	0	0	2	10	→ (2,0,0,0)
x_1	1	$-2/3$	0	$-1/3$	2	
S_1	0	$1/3$	1	$2/3$	0	

* در تست نسبت همواره متغیری که تباهیده می‌کند (سمت راست ۰) برنده می‌شود (اگر وارد شود)

* مقدار تست نسبت درعین حال که متغیر خروجی از پایه را مشخص می‌کند "بیانگر مقدار متغیر ورودی به پایه در تکرار بعدی است."

irmgn.ir

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\boxed{3} \longleftarrow \boxed{-3}$:

می تواند وارد سمت مثبت شود و متغیر دیگری وارد پایه می شود. در این حالت BFS جدید تولید می شود ⟸ جواب چندگانه داریم.

mid

IV) جواب بیکران :

مسئله LP به فرم
$$\begin{cases} \max z = CX \\ AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$
را در نظر بگیرید. فرض کنید در یکی از تکرارهای روش s یک متغیر غیرپایه نظیر X_k با $Z_k - C_k < 0$ و $Y_k \leq 0$ وجود داشته باشد:

		X_k
		$Z_k - C_k < 0$
X_B		$y_{1k} \leq 0$ $\vdots$ ≤ 0 y_{mk} $\vdots$

ورود X_k به داخل پایه در تکرار بعد موجب می شود که:

$$X_B = B^{-1}b - \sum_{j \in NBV} Y_j X_j$$

$Y_k \leq 0$ و X_k می خواهد با مقدار مثبت وارد شود

$$X_B = \underbrace{B^{-1}b - Y_k X_k}_{> 0}$$

$\Rightarrow X_k \to +\infty$

(هیچ محدودیتی ندارد)

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

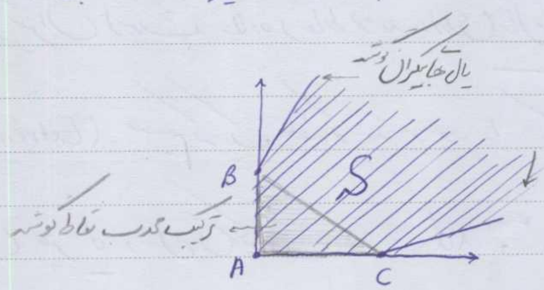
$$Z = C_B B^{-1} b - (Z_k - C_k) X_k \qquad \begin{matrix} Z_k - C_k < 0 \\ X_k \geq 0 \end{matrix} \implies Z \to +\infty$$

* شرط بی‌کران بودن مسئله LP فوق وجود یک متغیر غیرپایه نظیر X_k است به طوریکه $Z_k - C_k < 0$ و $Y_k \leq 0$. (تست نسبت برای متغیر ورودی قابل اجرا نباشد)

$$\text{Max } Z = X_1 + 3X_2$$

$$\text{s.t.} \quad (1)\ X_1 - 2X_2 \leq 4$$

$$(2)\ -X_1 + X_2 \leq 3$$



B	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	-4	0	0	3	9
S_1	-1	0	1	2	10
X_2	-1	1	0	1	3

معادلات $\mapsto$ وابسته

$$-X_1 + S_1 + 2\cancel{S_2} = 10$$

$$-X_1 + X_2 + \cancel{S_2} = 3$$

$$Z - 4X_1 + 3\cancel{S_2} = 9$$

* S_2 که ضمناً غیرپایه می‌ماند.

$$S_1 = 10 + X_1$$

$$X_2 = 3 + X_1 \qquad \implies \qquad X_1 \to \infty$$

$$Z = 9 + 4X_1 \qquad \qquad Z \to \infty$$

? آیا به دلیل بیکران بودن فضا جواب بیکران شد؟؟ No

* درصورتی که به ازای یک متغیر نظیر X_k داشته باشیم: $Y_k \leq 0$ اما $Z_k - C_k \geq 0$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در این صورت فضای جواب بیکران اما جواب مسئله می تواند بیکران باشد.

* در دنیای واقعی مسئله ای وجود ندارد که جواب بیکران داشته باشد و همواره محدودیت سرمایه، نیروی انسانی، ... وجود دارد.

* در حالتی که فضای موجه مسئله بیکران است علاوه بر نقاط گوشه دارای یال های بیکران گوشه (Extreme Unbounded Edge) هستیم که یک نقطه گوشه موجود را به گوشه ای در ∞ در راستای جهت حدی نظیر d وصل می کند:

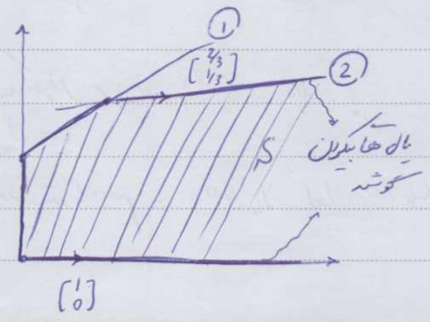
$$X = X^* + \lambda d$$
$$\lambda \geq 0$$

(کانونی)

* در یک مجموعه محدب غیرخالی نظیر $S = \{X \mid AX \leq b, X \geq 0\}$، بردار غیرصفر d جهت (Direction) مجموعه S است، اگر و فقط اگر متعلق به مجموعه $D = \{d \mid d \geq 0, d \neq 0, Ad \leq 0\}$ باشد.

مثال: جهت ها؟

① $-X_1 + X_2 \leq 2$
② $-X_1 + 2X_2 \leq 6$
③ $X_1, X_2 \geq 0$



Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$D \begin{cases} -d_1+d_2 \leq 0 \\ -d_1+2d_2 \leq 0 \\ d_1, d_2 \geq 0, \quad \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(معادلات همگن)

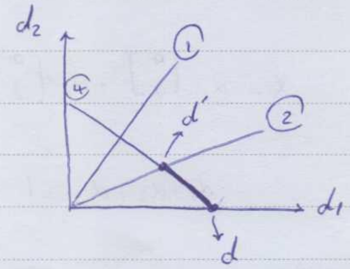
* برای نرمال کردن جهت ها d می توان محدودیت $1d = 1$ را اضافه کرد:

$$1d = 1 \Rightarrow (1,1)\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow d_1+d_2 = 1$$

* چرا نرمال می کنیم؟ برای اینکه وقتی جمع 1 است، نسبت دو بردار، به سادگی قابل مشاهده است.

* منظور از جهت های حدی (Extreme Directions) عبارتند از نقاط گوشه مجموعه D.

$$D \text{ نرمال} \begin{cases} ① -d_1+d_2 \leq 0 \\ ② -d_1+2d_2 \leq 0 \\ ③ d_1, d_2 \geq 0, \quad \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ ④ d_1+d_2 = 1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad d' = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda \geq 0 \qquad\qquad X = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \quad \lambda \geq 0$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

** قضیه اساسی مربوط به فضای بیکران در یک مسئله LP :

هنگامی که در یک مسئله LP فضای مسئله بیکران باشد درانصورت هر نقطه متعلق به این فضای بیکران را می توان به صورت ترکیب محدب نقاط گوشه S و ترکیب خطی غیرمنفی جهت ها حدی که نوشت.

x_j^* : نقاط گوشه $\qquad$ جهت حدی k : d_k^*

$$\underset{\sim}{X} \in S \implies \begin{cases} X = \sum_j \alpha_j x_j^* + \sum_k \beta_k d_k^* \\ \sum_j \alpha_j = 1 \qquad \alpha_j , \beta_k \geqslant 0 \end{cases}$$

$$X = \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \qquad \alpha_j \geqslant 0 \; , \; \beta_1 , \beta_2 \geqslant 0$$

تمرین تشویقی : تولید 50 نقطه تصادفی موجود در فضای S و تعیین ضرایب α , β

آیا α , β منحصر به فردند ؟ رهان خلف

Subject:
Year. Month. Date. ( )

** شرط لازم و کافی جهت بیکران بودن جواب مسئله LP :

جواب مسئله LP به صورت
$$\begin{cases} \max z = CX \\ AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$
بیکران است اگر به ازای حداقل یک جهت حدی نظیر d داشته باشیم : $cd > 0$ $\{cd < 0 : \text{min در}\}$

جواب ؟ $\quad \max Z = -X_1 + 3X_2$: تابع هدف

بیکران ← $cd' = (-1, 3)\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 1/3 > 0$ $\quad cd = (-1, 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$

تباهیدگی Degeneracy :

در یک جواب تباهیده مسئله LP حداقل یکی از متغیرهای پایه صفر است.

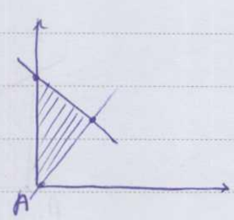
** یکی از دلایل بروز تباهیدگی محدودیت های زاید است.

$\max z = 5X_1 + 2X_2$

① $X_1 + X_2 \leq 6$

② $X_1 - X_2 \leq 0$

$X_1, X_2 \geq 0$



در A تباهیدگی وجود دارد.

زاید است : $X_2 \geq 0$

$X_1 \leq X_2 \; , \; X_1 \geq 0 \rightarrow X_2 \geq 0$

	X_1	X_2	RHS
z	-5	-2	0
S_1	1	1	6
S_2	1	-1	0

→

PAPCO

	X_2	S_2	RHS
Z	-7	5	0
S_1	2	-1	6
X_1	-1	0	0

$(0,0,6,0) \longrightarrow A$

↓

	S_1	S_2	RHS
Z			
X_2			
X_1			

تباهیدگی یک جور درجا زدن است، نه تابع هدف را بهینه می‌کند و نه به نقطهٔ جدیدی می‌رود

↓ B

** یکی دیگر از حالات بروز تباهیدگی هنگامی است که بیش از یک کاندید متغیر خروج از پایه باشد

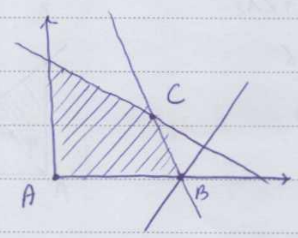
≡ در ستون نسبت گره وجود دارد.

$\max Z = 2X_1 + X_2$

(1) $4X_1 + 3X_2 \leq 12$

(2) $4X_1 + X_2 \leq 8$

(3) $4X_1 - X_2 \leq 8$



	X_1	X_2	RHS
Z	-2	-1	0
S_1	4	3	12
S_2	4	1	8
S_3	4	-1	8

$\min \{ 12/4 , 8/4 , 8/4 \} = 2 \Longrightarrow$ S_2 و S_3 دلخواه ↓ S_2

	X_2	S_2	RHS
z			
S_1			4
X_1			2
S_3			0

متغیری که کنار نداشته شد (چه)
مقدار ۰ می گیرد. ضریب × ۰ + ۰

به دور افتادن
قضیه (Dantzig) : در یک مسئله Lp در صورتی که تباهیدگی وجود نداشته باشد و فضای موجه تهی نباشد به کارگیری روش Simplex پس از تعداد محدودی تکرار یا منجر به جواب بهینه مسئله خواهد شد و یا منجر به این نتیجه که جواب مسئله بیکران است

«قضیه، بیانگر درستی روش Simplex است.»

* در یکی از حالات خاص و نادر تباهیدگی که بر اثر وجود گره در تست نسبت اتفاق می افتد در یک دور از پایه هایی که همگی متعلق به یک نقطه گوشه هستند گیر خواهیم افتاد :

$$B_1 \longrightarrow B_2 \longrightarrow B_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow B_k = B_1$$

تباهیده تباهیده تباهیده —

حالت به دور افتادن (Cycling) اتفاق افتاده است.

* روش سیمپلکس در حالتی که به دور افتادن وجود دارد با تغییرات کوچکی قابل اجراست

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تغییرات کوچک : 1. روش الفبایی 2. روش Bland

(مطالعه کلاسی)

روش M بزرگ (Big M Method)

این روش هنگامی به کار می رود که تشخیص BFS اولیه امکان پذیر نباشد.

$Min\ Z = 4X_1 + X_2 + R_1$

s.t. (1) $3X_1 + X_2 = 3$ $+R_2$

(2) $4X_1 + 3X_2 \geq 6 \rightarrow 4X_1 + 3X_2 - S_1 = 6$

(3) $X_1 + 2X_2 \geq 3 \quad X_1 + 2X_2 + S_2 = 3$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

	X_1	X_2	S_1	R_1	R_2	S_2	RHS
Z	-4	-1	0	-M	-M	0	
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
S_2	1	2	0	0	0	1	3

S_1 که چون شرط موجه بودن را تأمین نمی کند نمی شود پایه شود.

✓ S_2 که طوری بود که ضریبش در یک محدودیت +1 و در بقیه 0 بود.

خودمان R_1 ، R_2 را به معادلات (1) و (2) اضافه می کنیم. این تضمین را داریم که در آخر مقدارشان 0 می شود ← درست است.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* به متغیرهایی مثل R_1 و R_2 که به سمت چپ معادلات مسئله LP در فرم استاندارد اضافه می‌شوند تا تشکیل BFS اولیه میسر شود، متغیرهای مصنوعی (Artificial Variables) گویند. و متغیرهای مصنوعی باعث نقض معادلات مربوط می‌شود اگر مقدار بهینه آنها صفر نشود.

* جهت تضمین 0 شدن R_1 و R_2 : ضرایب آنها در تابع هدف را ضرایب بسیار بزرگ در نظر می‌گیریم : تابع هدف : $\min \Rightarrow$ یک ضریب بسیار بزرگ $+M$

$\Rightarrow \max$: ... $-M$

تابع هدف : $\min Z = 4X_1 + X_2 + MR_1 + MR_2$

* در جدول شروع M بزرگ (و همین طور در فاز اول و دوم روش دوفاز) باید مقادیر $Z_j - C_j$ متغیرهای مصنوعی موجود در پایه 0 شود. برای این منظور از عملیات سطری استفاده می‌کنیم :

سطر Z جدید = سطر Z قدیم + $M \times$ (سطر R_1) + $M \times$ (سطر R_2)

$\Rightarrow$ Z(جدید) | $7M-4$ $4M-1$ $-M$ 0   0   0 $9M$

$\Rightarrow$ متغیر ورودی : X_1 خروجی : R_1

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

	X_1	X_2	S_1	R_1	R_2	S_2	
Z	0	$\frac{5}{3}M+\frac{1}{3}$	$-M$	$-\frac{7}{3}M+\frac{4}{3}$	0	0	$2M+4$
X_1	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1
R_2	0	$\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{4}{3}$	1	0	2
S_2	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	2

✓ هرچه زودتر خارج شوند بهترند

$$\min\left\{\frac{1}{1/3},\ \frac{2}{5/3},\ \frac{2}{5/3}\right\} = \frac{6}{5} \longrightarrow R_2 \text{ یا } S_2 \longrightarrow R_2$$

⋮

	X_1	X_2	S_1	R_1	R_2	S_2	
Z	0	0	0	$-M+\frac{7}{5}$	$-M$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{18}{5}$
X_1							$\frac{3}{5}$
X_2		Optimal Solution					$\frac{6}{5}$
S_2							0

$X_1^* = \frac{3}{5}$

$X_2^* = \frac{6}{5}$

$R_1^* = R_2^* = S_1^* = S_2^* = 0$

خلاصه روش M بزرگ :

1. اضافه کردن متغیرهای مصنوعی به محدودیت های $\geq$ یا $=$ درصورت نیاز.
2. تخصیص ضرایب لازم به متغیرهای مصنوعی در تابع هدف
3. تشکیل جدول Simplex با استفاده از متغیرهای مصنوعی در تابع هدف
4. انجام عملیات سطری برای صفر کردن ضرایب متغیرهای مصنوعی در تابع هدف
5. ادامه حل مسئله با روش معمولی تا حصول جواب نهایی.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* معمولاً به دلیل خطای گرد کردن ناشی از ضریب M امکان بروز خطا در جواب بهینه حاصل از M بزرگ وجود دارد.

تمرین تشویقی: ذکر یک مثال + حل آن با LINGO در مورد خطا روش M بزرگ

$$LP\begin{cases} \max\ z = CX \\ AX = b \\ X \geq 0 \end{cases} \rightarrow S \quad \Rightarrow \quad LP(M)\begin{cases} \max\ z = CX - MX_a^* \\ AX + X_a = b \\ X, X_a \geq 0 \end{cases} \rightarrow S(M)$$

X_a : متغیرهای مصنوعی

متغیری که ضریبش ۱ باشد وجود ندارد

* فضای موجه M اگر در مسئله LP(M) تهی نیست زیرا یک جواب به صورت $X=0$ و $X_a = b \geq 0$ دارد. طبق قضیه نقطه شده حل این مسئله با روش Simplex یا منجر به جواب بهینه می‌شود یا منجر به جواب بی‌کران.

Dantzig

اثبات در کتاب ۱

حل مسئله LP(M)

- جواب بهینه (X^*, X_a^*)
  - $X_a^* \neq 0$: مسئله LP جواب موجه ندارد
  - $X_a^* = 0$: جواب بهینه به دست می‌آید X^* برای $\hat{LP}$
- جواب بیکران
  - $X_a^* \neq 0$: مسئله اصلی LP(M) دارای جواب موجه نیست
  - $X_a^* = 0$: جواب مسئله اصلی LP بیکران

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:

$$\text{Max } Z = X_1 + X_2 - MR_1 - MR_2$$

$$\text{s.t. } (1) \quad X_1 - X_2 - X_3 + R_1 = 1$$

$$(2) \quad -X_1 + X_2 + 2X_3 - X_4 + R_2 = 1$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	R_1	R_2	RHS
Z	0	−2	0	−1	$M+2$	$M+1$	3
X_1	1	−1	0	−1	2	1	3
X_3	0	0	1	−1	1	1	2

⇐ جواب LP(M) بیکران است ⇐ LP اصلی هم بیکران

$X_a = 0$ +

Subject:
Year. Month. Date. ( )

روش دوفاز (Two-Phase Method)

$$\min \; z = 4X_1 + X_2$$

s.t.

(1) $3X_1 + X_2 + R_1 = 3$

(2) $4X_1 + 3X_2 - S_1 + R_2 = 6$

(3) $X_1 + 2X_2 + S_2 = 3$

$S_1, S_2, R_1, R_2, X_1, X_2 \geq 0$

* در روش دوفاز پس از اضافه شدن متغیرهای مصنوعی به مسئله اصلی. ابتدا در فاز I، سعی بر آن است که با تعریف تابع هدف جدیدی به صورت «حداقل‌ساز مصنوعی‌ها» متغیرهای مصنوعی از پایه خارج شوند و در انتهای فاز I یک BFS اولیه مسئله اصلی بدست آید. سپس در فاز II با BFS اولیه بدست آمده در انتهای فاز I و تابع هدف اصلی مسئله را حل می‌نماید.

فاز I : $\min r = R_1 + R_2$

	X_1	X_2	S_1	R_1	R_2	S_2	RHS
r جدید	7	4	-1	0	0	0	9
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
S_2	1	2	0	0	0	1	3

r جدید = r قدیم + سطر R_1 + سطر R_2

$\longrightarrow$ ...

Subject:
Year. Month. Date. ( )

	X_1	X_2	S_1	R_1	R_2	S_2	
r	0	0	0	-1	-1	0	0
X_1			جدول بهینه فاز I				3/5
X_2							6/5
S_2							0

* در انتهای فاز I ، 3 حالت زیر ممکن است اتفاق بیفتد :

(1) $r^*=0$ و هیچ متغیر مصنوعی در پایه بهینه فاز I وجود نداشته باشد.

	X_1	X_2	S_1	R_1	R_2	S_2	RHS
r	0	0	0	-1	-1	0	0
X_1	1	0	1/5	3/5	-1/5	0	3/5
X_2	0	1	-3/5	-4/5	3/5	0	6/5
S_2	0	0	1	1	-1	1	0

در این حالت BFS اولیه برای مسئله اصلی بدست آمده است و می توان فاز II را با جایگزینی تابع هدف مسئله اصلی و حذف متغیرهای مصنوعی شروع می کنیم و با روش عادی Simplex ادامه می دهیم.

	X_1	X_2	S_1	S_2
Z	-4	-1	0	0
X_1	1	0	1/5	
X_2	0	1	-3/5	—
S_2	0	0	1	

$Z_{\text{جدید}} = Z_{\text{قدیم}} + 4(X_1) + X_2$ سطر

	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	0	0	$1/5$	0	$16/5$
X_1	1	0	$1/5$	0	$3/5$
X_2	0	1	$-3/5$	0	$6/5$
S_2	0	0	1	1	0

جدول فوق بهینه خواهد شد

(2) $r^* > 0$: دراین حالت مسئله اصلی دارای جواب موجه نیست.

(چون R_1 یا R_2 یکی مثبت شده)

(3) $r^* = 0$ و حداقل یک متغیر مصنوعی در پایه بهینه فاز I بصورت تباهیده وجود دارد.

دراین صورت نیز ابتدا متغیرهای مصنوعی غیرپایه را از جدول حذف کرده و تابع هدف مسئله اصلی را جایگزین کرده و عملیات سطری در مورد سطر Z انجام داده و به روش عادی Simplex مسئله را حل می‌کنیم تا به یکی از 3 حالت زیر بخوریم :

	X_k	
X_{B_1}		
⋮		
X_{B_k}		
R_1		0
⋮		⋮
R_t		0
⋮		⋮
R_p		0

Subject:
Year. Month. Date. ( )

الف) به ازای حداقل یکی از متغیرهای مصنوعی موجود در پایه داریم: $y_{tk}>0$

نظیر $\hat{R_t}$

Z	
X_{B_1}	
⋮	
X_{B_k}	✓
R_1	0
⋮	⋮
X_k	0
⋮	⋮
R_p	0

دراینصورت در جدول بعدی x_k جایگزین R_t شده و مشکلی از اینجا پیش نمی آید

ب) اگر به ازای تمام متغیرهای مصنوعی نظیر R_i در پایه داشته باشیم $y_{ik}=0$ ، $i=1,\dots,p$

در این حالت X_k به ازای یک متغیر اصلی وارد پایه شده و مقادیر R_i ها همان صفر می مانند.

ج) اگر الف و ب اتفاق نیفتد یعنی حداقل یک متغیر مصنوعی نظیر R_t وجود دارد که در آن $y_{tk}<0$: در این حالت اگر X_k به جای یک متغیر اصلی وارد پایه می شود، (غیرتباهیده) مقدار R_t در جدول جدید مثبت خواهد شد

X_B'	
R_1	
⋮	
R_t	$\to 0$
⋮	
R_p	

برای جلوگیری از این کار تغییر زیر را در الگوریتم که در هنگام بروز حالت ج-3، ایجاد کنیم:
بدین ترتیب که متغیر X_k را در هنگام بروز این حالت، مستقیماً به جای R_t وارد پایه نموده و R_t را کلاً از جدول حذف می کنیم (به جای انجام تست نسبت):

z		
X_B		مقادیر قبلی
R_1		0
$\vdots$		$\vdots$
X_k		0
$\vdots$		$\vdots$
R_p		0

با این کار هیچ گونه تغییری در مقادیر سایر متغیرهای پایه اتفاق نمی افتد.

مثال:

$$\min\ Z = -X_1 + 2X_2 - 3X_3$$

$$① \quad X_1 + X_2 + X_3 + R_1 = 6$$
$$② \quad -X_1 + X_2 + 2X_3 + R_2 = 4$$
$$③ \quad 2X_2 + 3X_3 + R_3 = 10$$
$$④ \quad X_2 + S_1 = 2$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

$$\min\ r = R_1 + R_2 + R_3$$

«فاز I»

	X_1	X_2	X_3	S_1	R_1	R_2	R_3	RHS
r	0	0	0	0	-2	-2	0	0
X_1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	2
X_2	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
R_3	0	0	0	0	-1	-1	1	0
X_3	0	0	1	1	0	0	0	2

$r^* = 0$
اما R_3 در پایه

Subject:
Year. Month. Date. ( )

	X_1	X_2	X_3	S_1	R_3	RHS
z	1	-2	3	0	0	0
X_1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	2
X_2	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	0	2
R_3	0	0	0	0	1	0
X_3	0	0	1	1	0	2

← حذف R_1 ، R_2
و تابع هدف جدید

* همه ضرایب 0 اند و یکی 1 ⟸ محدودیت زاید

مثال:

$$Max\ z = X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 2X_4$$

① $X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 + R_1 = 5$

② $X_1 + X_2 + X_3 + 3X_4 + R_2 = 7$

③ $-X_2 + X_3 + 2X_4 + R_3 = 2$

جدول های فاز I :

	X_1	X_2	X_3	X_4	R_1	R_2	R_3	RHS
r	0	0	-1	0	-2	0	-2	0
X_2	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$
R_2	0	0	-1	0	-1	1	1	0
X_4	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$
					X حذف		X	

$r^* = 0$

R_2 در پایه ← 3

ج - 3

به جای استفاده از تست نسبت، مستقیماً X_3 به جای R_2 وارد پایه می شود.

+ R_2 از جدول حذف می شد (سمت راست تغییر نمی کند)

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

	X_1	X_2	X_3	X_4	R_2	
					$-\frac{7}{3}$	
X_2						$\frac{8}{5}$
X_3	0	0	1	0	-1	0
X_4						$\frac{9}{5}$

اگر R_2 باشد:

دوباره می‌خواهد ← وارد پایه شود

روش یک متغیر مصنوعی

$$Max\ z = C_1X_1 + \cdots + C_nX_n$$

استاندارد

$$(1)\quad a_{11}X_1 + \cdots + a_{1n}X_n \geq b_1 \quad \longrightarrow \quad \ldots - S_1 + R_1 = b_1$$

$$(2)\quad a_{21}X_1 + \cdots + a_{2n}X_n \geq b_2 \qquad - S_2 + R_2 = b_2$$

$$\vdots$$

$$(m)\quad a_{m1}X_1 + \cdots + a_{mn}X_n \geq b_m \qquad - S_m + R_m = b_m$$

* به دلیل آنکه اضافه شدن متغیرهای مصنوعی باعث ازدیاد زمان حل مسئله می‌شود، روش یک متغیر مصنوعی تلاش دارد که با تنها یک متغیر مصنوعی پایه اولیه شروع را تولید کند.

* این روش در کنار روش M-بزرگ یا دوفاز این پایه را ایجاد خواهد کرد:

استاندارد

$$(1)\quad -a_{11}X_1 - a_{12}X_2 - \cdots - a_{1n}X_n \leq -b_1 \quad \longrightarrow \quad \ldots + S_1 = -b_1$$

$$(2)\quad -a_{21}X_1 - a_{22}X_2 - \cdots - a_{2n}X_n \leq -b_2 \qquad -\hat{R}$$

$$\vdots$$

$$(m)\quad -a_{m1}X_1 - a_{m2}X_2 - \cdots - a_{mn}X_n \leq -b_m \qquad \ldots + S_m = -b_m$$

$$-\hat{R}$$

* اگر محدودیتی به صورت = باشد، ≥ و ≤ نوشته شود ...

Subject:
Year. Month. Date. ( )

	S_1	S_2	$\cdots$	S_m	R	
S_1	1	0		0	-1	$-b_1$
S_2	0	1			-1	$-b_2$
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$
S_t		0			-1	$-b_t$
$\vdots$		$\vdots$		0	$\vdots$	$\vdots$
S_m	0	0		1	-1	$-b_m$

→ ناپذیر

× BFS

وارد پایه

$R \to S_t$

S_1	$b_t - b_1$
$\vdots$	$\vdots$
R	
S_m	$b_t - b_m$

≥ 0

* در مسئله فوق $S_1, \dots, S_m$ تشکیل یک پایه غیر موجه را خواهند داد. حال با وارد کردن R به جای متغیر نظیر S_t که دارای منفی‌ترین سمت راست است یک BFS اولیه تشکیل خواهد شد که شامل R است. جهت حذف آن می‌توان از روش‌ها M بزرگ و یا دو فاز استفاده کرد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال :

$$\text{Min} \quad 2X_1 + 3X_2$$

s.t. ① $X_1 + X_2 \geq 3 \rightarrow -X_1 - X_2 \leq -3 \rightarrow -X_1 - X_2 + S_1 - R = -3$

② $-2X_1 + X_2 \geq 2 \rightarrow 2X_1 - X_2 \leq -2 \rightarrow 2X_1 - X_2 + S_2 - R = -2$

$X_1, X_2 \geq 0$

	X_1	X_2	S_1	S_2	R	RHS
S_1	-1	-1	1	0	-1	-3
S_2	2	-1	0	1	-1	-2
	M	$M-3$	$-M$		0	
Z	-2	-3	0	0	$-M$	
R	1	1	-1	0	1	3
S_2	3	0	-1	1	0	1

هدف ما فعلاً پیدا کردن BFS اولیه است

M- بزرگ یا →

فاز استفاده: II

* در جدول ۵ داریم :

	X_k	
Z	$C_B B^{-1} a_j - C_j$	$C_B B^{-1} b$
X_B	$B^{-1} a_j$	$B^{-1} b$

<= در هر مرحله اگر B^{-1} را داشته باشیم مسئله حل شده (؟) ↓

✓ تعیین وارون ماتریس پایه از طریق حاصلضرب ماتریس ها مقدماتی :

(Product Form of Inverse)

فرض کنید در تکرار فعلی با توجه به متغیرها پایه X_B . ماتریس پایه B_{old} بوده و داریم :

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$B_{old} = (a_{B_1}, \dots, a_{B_r}, \dots, a_{B_m})$$

x_{B_1}
⋮

فرض کنید در تکرار بعد متغیر x_k ورودی، متغیر x_{B_r} خروجی باشد. در این صورت

پایه جدید تکرار بعدی: B_{New} ← $B_{New} = (a_{B_1}, \dots, a_k, \dots, a_{B_m})$ (I)

از طرف دیگر می‌دانیم که: $y_j = B^{-1}a_j$ (II) (که برای هر ستون جدول که وابسته به متغیرهایی نظیر x_j داریم)

$$y_{B_i} = B^{-1}a_{B_i}$$

در مورد متغیرهای پایه: $y_{B_i} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ i \text{ ام} \\ \\ \\ \end{array} \equiv e_i$

$$\Longrightarrow \quad e_i = B^{-1}a_{B_i} \Rightarrow a_{B_i} = Be_i \quad \text{(III)}$$

$$\xrightarrow{\text{III, II, I}} \quad B_{New} = (B_{old}e_1, B_{old}e_2, \dots, \underset{*}{B_{old}y_k}, \dots B_{old}e_m)$$

* در مورد متغیر غیر پایه فعلی x_k داریم: $y_k = B^{-1}a_k \Rightarrow a_k = By_k$

$$\Longrightarrow \quad B_{New} = B_{old}\underbrace{(e_1, e_2, \dots, y_k, \dots, e_m)}_{T}$$

← T

PAPCO

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & y_{1k} & 0 \\ 0 & 1 & y_{2k} & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & y_{mk} & 1 \end{pmatrix} \qquad * \; B_{New} = B_{old} \cdot T \; *$$

$$\Rightarrow \quad B^{-1}_{New} = T^{-1} B^{-1}_{old}$$

می‌دانیم که :

$$E = T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -y_{1k}/y_{rk} & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1/y_{rk} & 0 \\ 0 & 0 & -y_{mk}/y_{rk} & 1 \end{pmatrix}$$

پس : $\boxed{B^{-1}_{New} = E \cdot B^{-1}_{old}}$

✓ ماتریس‌ها T و E که فقط در یک ستون با ماتریس I فرق می‌کنند ماتریس مقدماتی هستند.

* تک ستون ماتریس E که با ماتریس I متفاوت است، عبارتست از ستون λ :

$$\lambda = \begin{pmatrix} -y_{1k}/y_{rk} \\ \vdots \\ 1/y_{rk} \\ \vdots \\ -y_{mk}/y_{rk} \end{pmatrix}$$

* فرض کنید مسئله اصلی به فرم کانونی باشد که با افزودن متغیرهای کمکی (slack) به فرم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

رستا ندارد در آمده باشد،

$B_0^{-1} = I$

$B_1^{-1} = E_1 \cdot B_0^{-1} = E_1 \cdot I$

$B_2^{-1} = E_2 \cdot B_1^{-1} = E_2 \cdot E_1 \cdot I$

$\vdots$

$B_t^{-1} = E_t \cdot B_{t-1}^{-1} = E_t \cdot E_{t-1} \cdots E_2 E_1 \cdot I$

مثال: یک مسئله اصلی به فرم کانونی داده شده است که دارای 3 محدودیت ≥ است. ستون متغیر ورودی $Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، متغیر خروجی، متغیر دوم پایه فعلی است. $B_1^{-1} = ?$

جای ستون 2

$B_1^{-1} = E_1 B_0^{-1}$

$\lambda = ?$

$\lambda = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

	X_3
S_1	
S_2	
S_3	

$B_1^{-1} = E_1 I = E_1 = \begin{pmatrix} 1 & |\lambda| & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

فرض کنید X_2 می خواهد جایگزین S_2 شود،

$Y_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\lambda = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $E_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B_2^{-1} = E_2 \cdot E_1 \cdot I = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Revised Simplex Method

روش سیمپلکس تجدید نظر شده

در این روش نیاز به جدول s نیستیم و تمام محاسبات به فرم ماتریسی انجام می شود.

گام 1: فرض کنید یک BFS اولیه داریم، $B_0^{-1} = I$ ، $X_B = B_0^{-1} b = b$

گام 2: متغیر ورودی به پایه ← محاسبه $Z_j - C_j = C_B B^{-1} a_j - C_j$ ، $\forall j \in NBV$

و تعیین متغیر ورودی براساس ضابطه روش s و بررسی شرط توقف.

گام 3: متغیر خروجی از پایه ← محاسبه $Y_k = B^{-1} a_k$ و انجام تست نسبت و تعیین متغیر خروجی

گام 4: محاسبه $B^{-1}_{New} = E B^{-1}_{old}$ و سایر محاسبات مربوطه: $X_{B_{New}}$ ، Z_{New} و جایگزینی

B^{-1}_{New} به جای B^{-1}_{old} و بازگشت به گام 2

تمرین تشویقی: جزئیات صرفه جویی در محاسبات روش s نسبت به s تجدید نظر شده به جدول موجود در کتاب را توضیح

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال :

$\max\ Z = 12X_1 + 8X_2$

$s.t$ (1) $5X_1 + 2X_2 \leq 150 \quad \cdots + X_3 = 150$

(2) $2X_1 + 3X_2 \leq 100 \quad \cdots + X_4 = 100$

(3) $4X_1 + 2X_2 \leq 80 \quad \cdots + X_5 = 80$

$X_j \geq 0 \qquad X_3, X_4, X_5 \geq 0$

$$B_0 = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} \qquad B_0^{-1} = I$$

$$j \in NBV : Z_j - C_j : = \underbrace{C_B}_{0} B^{-1} a_j - C_j = -C_j$$

$$Z_1 - C_1 = \underline{-12} \qquad Z_2 - C_2 = -8 \qquad \Longrightarrow \qquad X_1 : \text{ورود}$$

$$Y_1 = B_0^{-1} a_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \min\left\{ \frac{150}{5}, \frac{100}{2}, \frac{80}{4} \right\} = 20 \xrightarrow{\text{خروج}} X_5$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} -5/4 \\ -1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} \longrightarrow E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/4 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}_{New} = E_1 \cdot B_0^{-1} = E_1 I = E_1$$

$$X_{B_{New}} = B_1^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/4 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 150 \\ 100 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$Z_{New} = C_{B_{New}} X_{B_{New}} = (0, 0, 12) \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \\ 20 \end{pmatrix} = 240$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$Z_j - C_j = C_B B^{-1} a_j - C_j :$$

$Z_2 - C_2 = -2 \longmapsto$ ورود : X_2

$Z_5 - C_5 = 3$

$$Y_2 = B_1^{-1} a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/4 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$\min\{-, \frac{60}{2}, \frac{20}{1/2}\} = 30$

خروجی X_4

$$Y_2 \longmapsto \lambda = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ -1/4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow B_2^{-1} = E_2 B_1^{-1}$$

بعد :

$$\Longrightarrow B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & -11/8 \\ 0 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 3/8 \end{pmatrix} \qquad X_{B_{new}} = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_2 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 30 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$Z_j - C_j : \quad Z_4 - C_4 = (0, 1, 9/2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$Z_5 - C_5 = \quad '' \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{9}{2} \longrightarrow$$ بهینه

$$Z^* = 12 \times 5 + 8 \times 30 = \underline{300}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Duality Theory

تئوری دوگانی

به هر مسئله LP می‌توان مسئله LP دیگری را وابسته نمود که اگر مسئله اول را مسئله اولیه (Primal) بنامیم مسئله دوم را دوگان یا ثانویه (Duel) می‌نامیم. مسئله اولیه و دوگان هم از لحاظ شکل ظاهری و هم از لحاظ مقادیر جواب‌های متغیرها باهم در ارتباط هستند.

** تولید مسئله دوگان درصورتی که مسئله اولیه به فرم کانونی باشد:

(P)

$$\max\ Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$$

s.t.

$$y_1 \leftarrow (1)\ a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \leq b_1$$

$$y_2 \leftarrow (2)\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n \leq b_2$$

$$\vdots$$

$$y_n \leftarrow (n)\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n \leq b_m$$

$$X_j \geq 0,\quad j = 1, 2, \ldots, n$$

(D)

$$\min\ w = b_1Y_1 + b_2Y_2 + \cdots + b_mY_m$$

s.t.

$$(1)\ a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1$$

$$(2)\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a\ y_m \geq c_2$$

$$\vdots$$

$$(n)\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n$$

$$y_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, m$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* در مسئله اولیه تعداد متغیرها n و تعداد محدودیت ها m است ولی در مسئله دوگان دارای m متغیر و n محدودیت داریم.

مثال:

* اول: بررسی کانونی بودن

P

$$\max z = 5x_1 + 6x_2$$

$$\begin{aligned}
s.t.\quad &(1)\quad 1x_1 + 9x_2 \leq 60\\
&(2)\quad 2x_1 + 3x_2 \leq 45\\
&(3)\quad 5x_1 - 2x_2 \leq 20\\
&(4)\quad 0 \quad\;\; 1x_2 \leq 30\\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

D

$$\min w = 60y_1 + 45y_2 + 20y_3 + 30y_4$$

$$\begin{aligned}
&(1)\quad y_1 + 2y_2 + 5y_3 \geq 5\\
&(2)\quad 9y_1 + 3y_2 - 2y_3 + y_4 \geq 6\\
&y_i \geq 0
\end{aligned}$$

مثال:

$$\min z = 6x_1 + 8x_2$$

$$\begin{aligned}
s.t.\quad &(1)\quad 3x_1 + x_2 \geq 4\\
&(2)\quad 5x_1 + 2x_2 \geq 7\\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

$$\max 4y_1 + 7y_2$$

$$\begin{aligned}
&(1)\quad 3y_1 + 5y_2 \leq 6\\
&(2)\quad y_1 + 2y_2 \leq 8\\
&y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}$$

* برعکس مثال بالایی است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

** تولید مسئله دوگان در صورتی که مسئله اولیه به صورت فرم استاندارد باشد:

* خصوصیات ظاهری مابین مسئله اولیه و دوگان:

- تعداد متغیرهای یک مسئله برابر تعداد محدودیت های مسئله دیگر است و بالعکس.

- تابع هدف یک مسئله به فرم Max (فرم کانونی) و تابع هدف مسئله دیگر Min (دوگان کانونی)

- علامت محدودیت ها در یک مسئله به صورت $\leq$ (فرم کانونی) و در مسئله دیگر به صورت $\geq$ (دوگان کانونی)

- ضرایب تابع هدف یک مسئله بردار مقادیر سمت راست مسئله دیگر است و بالعکس.

- بردار ستونی ضرایب یک متغیر، تشکیل دهنده ضرایب سمت چپ تابع محدودیت نظیرش در مسئله دیگر است.

(P)

$$\max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2$$

s.t.

$$(1) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \Longrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \xrightarrow{*} \end{cases}$$

$$(2) \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \Longrightarrow \begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2 \xrightarrow{**} \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\xrightarrow{*} \quad -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \leq -b_1$$

$$\xrightarrow{**} \quad -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 \leq -b_2$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(D)

$$\min \ w = b_1 y_1 - b_1 y_2 + b_2 y_3 - b_2 y_4$$

s.t.

$$① \quad a_{11} y_1 - a_{11} y_2 + a_{21} y_3 - a_{21} y_4 \geq c_1$$

$$② \quad a_{12} y_1 - a_{12} y_2 + a_{22} y_3 - a_{22} y_4 \geq c_2$$

$$y_i \geq 0$$

تابع هدف $\quad \min \ w = b_1 (y_1 - y_2) + b_2 (y_3 - y_4)$

محدودیت ها

$$a_{11} (y_1 - y_2) + a_{21} (y_3 - y_4) \geq c_1$$

$$a_{12} (y_1 - y_2) + a_{22} (y_3 - y_4) \geq c_2$$

$$y_1 - y_2 \rightarrow t_1 \qquad y_3 - y_4 \rightarrow t_2$$

$\Rightarrow$ (D) $\quad \min \ w = b_1 t_1 + b_2 t_2$

$$\text{s.t.} \quad ① \ a_{11} t_1 + a_{21} t_2 \geq c_1$$

$$② \ a_{12} t_1 + a_{22} t_2 \geq c_2$$

$$t_1 , t_2 \ \text{urs}$$

* متغیر دوگانی که به یک محدودیت = در مسئله اولیه وابسته می شود در مسئله دوگان از لحاظ علامت به صورت urs تعریف می شود.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

« جدول خصوصیات ظاهری مابین مسئله اولیه و دوگان »

P	D
تابع هدف max	تابع هدف min
بردار ضرایب متغیر x_j در محدودیت‌ها	ضرایب تابع محدودیت j-ام
ضریب متغیر x_j در تابع هدف	مقادیر سمت راست محدودیت j-ام
محدودیت i-ام به صورت $\le$	$y_i \ge 0$
= ــــ	y_i urs
$\ge$ ــــ	$y_i \le 0$
$x_j \ge 0$	محدودیت j-ام به صورت $\ge$
x_j urs	= ــــ
$x_j \le 0$	$\le$ ــــ

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:

(P)

$$\max\ z = 5X_1 + 12X_2 + 4X_3$$

s.t. ① $X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 5$

② $2X_1 - X_2 + 3X_3 \boxed{=} 2$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

(D)

$$\min\ 5y_1 + 2y_2$$

① $y_1 + 2y_2 \geq 5$

② $2y_1 - y_2 \geq 12$

③ $y_1 + 3y_2 \geq 4$

$y_1 \geq 0$

y_2 $\boxed{urs}$

✓✓ دو نکته: علامت محدودیت ها + علامت متغیرها

✓ باز هم کانونی که در ذهن داریم: علامت متغیرها = علامت در کانونی ← علامت محدودیت‌ها

D مثل دوگان کانونی.

✓ علامت متغیرهای D متناسب با علامت محدودیت‌های P

مثال:

(P)

$$\max\ z = 4X_1 + 5X_2$$

① $X_1 + 3X_2 \leq 4$

② $X_1 - X_2 \leq 2$

$X_1 \geq 0\ ,\ X_2 \leq 0$

$$\min\ w = 4y_1 + 2y_2$$

s.t. ① $y_1 + y_2 \geq 4$

② $3y_1 - y_2 \leq 5$

$y_1, y_2 \geq 0$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال :

$$\text{Max } Z = 8X_1 + 3X_2 - 2X_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } (1) \quad & X_1 - 6X_2 + X_3 \geq 2 \\ (2) \quad & 5X_1 + 7X_2 - 2X_3 = -4 \\ & X_1 \leq 0 ،\ X_2 \geq 0 ،\ X_3 \text{ urs} \end{aligned}$$

(D)

$$\text{Min } w = 2y_1 - 4y_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } (1) \quad & y_1 + 5y_2 \leq 8 \\ (2) \quad & -6y_1 + 7y_2 \geq 3 \\ (3) \quad & y_1 - 2y_2 = -2 \\ & y_1 \leq 0 \quad y_2 \text{ urs} \end{aligned}$$

** ارتباط بین جواب ها مسائل اولیه و دوگان :

قضیه خاصیت ضعیف دوگانی : Weak Duality Property

اگر مسئله اولیه به فرم کانونی باشد ، X_0 جواب موجه آن بوده و Y_0 نیز یک جواب موجه برای مسئله دوگان آن باشد در این صورت همواره : $(CX_0 =)\ Z_0 \leq w_0\ (= Yb)$

که در آن Z_0 ، w_0 به ترتیب مقادیر تابع هدف اولیه و دوگان به ازای X و Y است

اثبات : تمرین تشویقی : Winston p:290

Subject:

Year. Month. Date. ( )

(P) $\max\ Z = 4X_1 + 7X_2$

s.t. ① $3X_1 + 5X_2 \leq 6$

② $X_1 + 2X_2 \leq 8$

$X_1, X_2 \geq 0$

(D) $\min\ w = 6y_1 + 8y_2$

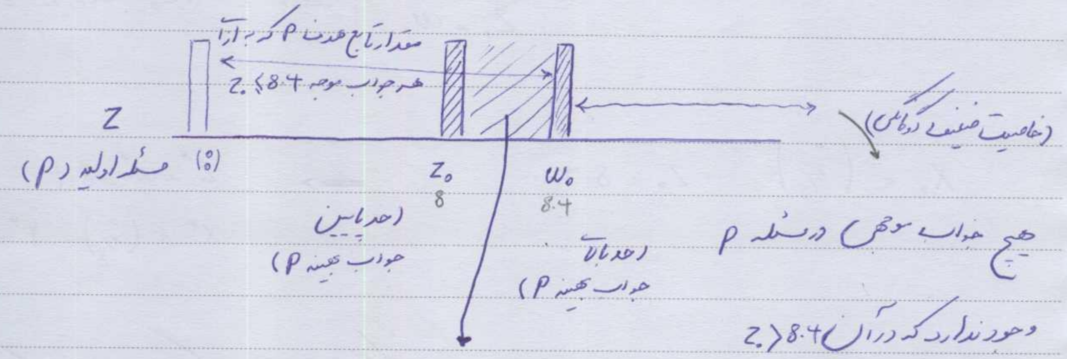
s.t. ① $3y_1 + y_2 \geq 4$

② $5y_1 + 2y_2 \geq 7$

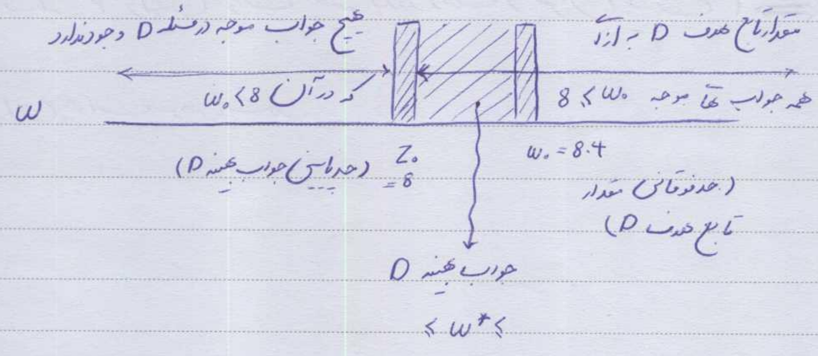
$y_1, y_2 \geq 0$

جواب موجه P : $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $Z_0 = 8$ D آزا : $\begin{pmatrix} 7/5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $w_0 = 8.4$

آیا می‌توان جواب موجه در P گشت که $Z_0 = 9$ ؟ نه، چون باید از 8.4 کوچکتر.



جواب موجه : جواب بهینه P در این ناحیه قرار دارد



Subject:
Year. Month. Date. ( )

* اگر X_0 و Y_0 جواب های موجه مسائل P و D باشند بطوریکه $Z_0 = W_0$ در اینصورت

$X^* = X_0$, $Y^* = Y_0$

خاصیت ضعیف دوگانی

P جواب موجه : $X_0 \Longrightarrow Z_0 \leq W^*$, $Z_0 = W_0$ $\Big\}$ $\Rightarrow W_0 \leq W^* \Rightarrow W_0 = W^*$

D جواب موجه $Y_0 \Longrightarrow Z^* \leq W_0$, $Z_0 = W_0$ $\Big\}$ $\Rightarrow Z^* \leq Z_0 \Rightarrow Z^* = Z_0$

$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6/5 \end{pmatrix} \rightarrow Z_0 = 8.4 \Longrightarrow Z^* = W^* = 8.4$

$X^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 6/5 \end{pmatrix}$ $Y^* = \begin{pmatrix} 7/5 \\ 0 \end{pmatrix}$

* اگر مسئله P بیکران باشد آنگاه D دارای جواب موجه نیست!

* اگر مسئله D بیکران باشد " P " " " .

* مسئله P دارای جواب بهینه محدود است (بیکران نیست) $\Longleftrightarrow$ هم P و هم D

دارای جواب موجه باشند. [؟]

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:

(P) $\max\ Z = 2X_1 + X_2$

s.t. $\begin{cases} X_1 - X_2 \leq 10 \\ 2X_1 - X_2 \leq 40 \end{cases}$

$X_1, X_2 \geq 0$

(D) $\min\ w = 10y_1 + 40y_2$

$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ -y_1 - y_2 \geq 1 \end{cases}$ * $\rightarrow$

$y_1, y_2 \geq 0$

$\Leftarrow$ P دارای جواب موجه نیست $\rightarrow$ بیکران یا موجه ندارد

(0,0) دارد $\Leftarrow$ بیکران

* D جواب موجه ندارد $\rightarrow$ P جواب موجه ندارد

P جواب بیکران دارد

قضیه اساسی دوگانی: Faundamental Theorem of Duality

ارتباط مابین جواب های مسائل P و D به صورت زیر است:

	D: جواب موجه دارد	D: جواب موجه ندارد
P: جواب موجه دارد	هم D و هم P دارای جواب بهینه هستند $Z^* = W^*$	مسئله P بیکران
P: جواب موجه ندارد	مسئله D بیکران	هم P و هم D دارای ناحیه موجه تهی هستند

مثال:

$\max\ z = 5X_1 + 3X_2$

s.t. (1) $X_1 - X_2 \leq -4$

(2) $-X_1 + X_2 \leq -2$

$X_1, X_2 \geq 0$

(1) + (2) $\rightarrow 0 \leq -6$

$\Leftarrow$ P جواب موجه ندارد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

D $\Leftarrow$ یا بیکران است یا جواب موجه ندارد:

ضرایب عیان می‌شوند و سمت راست 3 و 5 $\Rightarrow$ $a \geq 8$ X $\Rightarrow$ جواب موجه ندارد

قضیه: در یک مسئله به فرم کانونی: $(P)\begin{cases} \max z = CX \\ AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$ فرض کنید X^* و Z^*

مقادیر بهینه به ازای پایه بهینه B^* باشد. در اینصورت: $\boxed{Y^* = C_{B^*} B^{*^{-1}}}$ ضرایب simplex

اثبات: $(P)\begin{cases} \max z = CX \\ AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$ $(D)\begin{cases} \min w = Yb \\ YA \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$

اولاً می‌دانیم $Z^* = C_{B^*} B^{*^{-1}} b$ و از طرف دیگر تابع هدف مسئله D به ازای Y^*

برابر است با: $w = Y^* b = C_{B^*} B^{*^{-1}} b \Longrightarrow$

$w = Z^* \xrightarrow{\text{خاصیت ضعیف دوگانی}} w = w^*$

ثانیاً باید ثابت کنیم که Y^* جواب موجه در فضای D است یعنی:

$\begin{cases} Y^* A \geq C \\ Y^* \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} C_{B^*} B^{*^{-1}} A \geq C \\ C_B B^{*^{-1}} \geq 0 \end{cases}$

$C_B B^{*^{-1}} A = C_B B^{*^{-1}} (a_1, a_2, \ldots, a_n) \geq (C_1, \ldots, C_n)$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

یا $\forall j: C_B B^{*-1} a_j \geq C_j$

اما می‌دانیم که در پایه بهینه P $\forall j: Z_j - C_j \geq 0$ و یا به عبارتی $\forall j: C_B B^{*-1} a_j \geq C_j$

عینی رابطه برقرار است.

از طرف دیگر می‌دانیم که $C_B B^{*-1}$ (ضریب Sim) در واقع $(C_j - Z_j)$ متغیرهای کمکی در جدول بهینه P

است } ** تعیین مقادیر بهینه متغیرهای دوگان از روی جدول بهینه مسئله P **

* اگر مسئله P به فرم کانونی باشد مقادیر بهینه متغیرهای دوگان به صورت $Y^* = C_B B^{-1}$

به دست می‌آید که در آن B ماتریس پایه بهینه در مسئله P است.

* در واقع مقادیر بهینه متغیرهای دوگان مسئله P (که به فرم کانونی است) از روی ضرایب Simplex جدول بهینه مسئله P تعیین می‌شود.

* ضرایب Sim در جدول بهینه یک مسئله P به فرم کانونی در واقع $Z_j - C_j$ متغیرهای کمکی مسئله P در جدول بهینه هستند.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:

$$(P)\quad \max Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad (1)\quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 500 \\ (2)\quad & 3x_1 + 2x_3 \leq 460 \\ (3)\quad & x_1 + 4x_2 \leq 420 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

می دانیم که در جدول بهینه P متغیرهای پایه بهینه عبارتند از:

$X_B^* = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ S_3 \end{pmatrix}$: مطلوب است تعیین Y^* ؟

$$Y^* = C_B B^{-1} \qquad B^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y^* = (2,5,0) \cdot B^{-1} = (1,2,0)$$

$$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow$$

$$y_1^* \quad y_2^* \quad y_3^*$$

* درصورتی که P به فرم کانونی باشد، دراینصورت Y^* از روی مقادیر $z_j - c_j$ متغیر کمکی وابسته به آن به دست می آید.

* اگر مسئله P به فرم max باشد دراینصورت با توجه به نوع محدودیتی که متغیر دوگان به آن وابسته است:

اگر محدودیت بصورت "$\leq$" باشد $\Leftarrow$ y_i^* برابر $z_j - c_j$ متغیر کمکی s_i که وابسته به آن است

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر محدودیت به صورت $\geq$ یا $=$ باشد $\Rightarrow$

y_i^* برابر است با مقدار $z_j - c_j$ متغیر مصنوعی R_i وابسته به آن بدون درنظرگرفتن عبارت M

	R_i	

جدول بهینه

$$(z_j - c_j)_{R_i} = C_B B^{-1} a_j - c_j$$

$+M$ فاقد ضریب M

مثال:

(P) $Max\ Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$

s.t. (1) $X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 15$

(2) $2X_2 - X_3 \geq 5$

(3) $2X_1 + X_2 - 5X_3 = 10$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

هدف آن است که با داشتن جدول بهینه P

مقادیر بهینه D را تعیین؟

$\rightarrow$

$\boxed{y_1}$ (1) $X_1 + 3X_2 + 2X_3 + \boxed{S_1} = 15$

y_2 (2) $2X_2 - X_3 - e_1 + R_1 = 5$

y_3 (3) $2X_1 + X_2 - 5X_3 + R_2 = 10$

$y_1^* = \frac{51}{23}$ $\quad S_1^* = 0$

$y_2^* = \frac{-58}{23}$ $\quad R_1^* = 0$

$y_3^* = \frac{9}{23}$ $\quad R_2^* = 0$

همیشه؟ ← تعیین بعد

	X_1	X_2	X_3	S_1	e_1	R_1	R_2	RHS
Z	0	0	0	$51/23$	$58/23$	$M - \frac{58}{23}$	$M + \frac{9}{23}$	$565/23$
X_3					$5/23$	$-5/23$		$15/23$
X_2					$-9/23$	$9/23$		$65/23$
X_1					$17/23$	$-17/23$		$120/23$

$= W^* = Z^*$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$e_1 \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad R_1 \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

* اگر محدودیتی به صورت $\geqslant$ باشد به جای R می توانیم از e استفاده کنیم ←

مقدار بهینه = قرینه $c_j - z_j$ مربوط به e

قضیه لنگی مکمل

Complementary Slackness Theorem

اگر X_0 یک جواب موجه برای مسئله P که به فرم کانونی است باشد و Y_0 جواب موجه

← کم داریم

مسئله D وابسته به آن باشد در اینصورت: $X^* = X_0$ و $Y^* = Y_0$ است $\Leftrightarrow$

$$\forall i : S_i \times y_i = 0 \qquad \forall j , \; e_j \times x_j = 0$$

که در آن S_i متغیر کمکی محدودیت i مسئله P و e_j متغیر مازاد محدودیت j مسئله D

(≥ ⇐ e حتماً داریم)

است.

x_j و y_i مقادیر متغیرهای P و D در جواب های موجه X_0 و Y_0 هستند.

مثال :

$$\max \; Z = 60X_1 + 30X_2 + 20X_3$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} &(1) \quad 8X_1 + 6X_2 + X_3 + S_1 \leqslant 48 \\ &(2) \quad 4X_1 + 2X_2 + \tfrac{3}{2}X_3 + S_2 \leqslant 20 \\ &(3) \quad 2X_1 + \tfrac{3}{2}X_2 + \tfrac{1}{2}X_3 + S_3 \leqslant 8 \\ &\quad X_1, X_2, X_3 \geqslant 0 \end{aligned}$$

فرض : $X_1^* = 2 \quad X_2^* = 0$

$X_3^* = 8$

مقادیر بهینه متغیرهای دوگان؟

(D) $\min\ w = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3$

s.t.
(1) $8y_1 + 4y_2 + 2y_3 - e_1 = 60$
(2) $6y_1 + 2y_2 + \frac{3}{2}y_3 - e_2 = 30$
(3) $y_1 + \frac{3}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 - e_3 = 20$
$y_i \geq 0$

$X_1^*, X_2^*, X_3^* \xrightarrow[\text{معادلات مسئله P}]{\text{قرار دادن در دستگاه}} S_1^* = 24 \quad S_2^* = 0 \quad S_3^* = 0$

قضیه : $e_1 X_1 = 0 \Rightarrow e_1^* = 0 \qquad e_3 X_3 = 0 \Rightarrow e_3^* = 0$

$S_1 y_1 = 0 \Rightarrow y_1^* = 0 \xrightarrow[\text{معادلات}]{\text{دستگاه}} \begin{cases} 4y_2 + 2y_3 = 60 \\ \frac{3}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 = 20 \end{cases}$

معادله P 2

$\Rightarrow y_2^* = y_3^* = 10 \Rightarrow e_2^* = 5$

مثال: تعیین جواب بهینه مسئله زیر ؟

$\min\ Z = 2X_1 + 3X_2 + 5X_3 + 2X_4 + 3X_5$

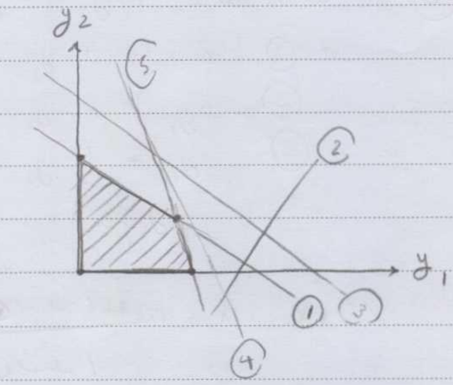
s.t.
(1) $X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 + 3X_5 \geq 4$
(2) $2X_1 - 2X_2 + 3X_3 + X_4 + X_5 \geq 3$
$X_j \geq 0$

irmgn.ir

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(D) : $\max Z = 4y_1 + 3y_2$

s.t.
(1) $y_1 + 2y_2 \leq 2$
(2) $y_1 - 2y_2 \leq 3$
(3) $2y_1 + 3y_2 \leq 5$
(4) $y_1 + y_2 \leq 2$
(5) $3y_1 + y_2 \leq 3$
$y_i \geq 0$



$$\begin{cases} (1) \\ (5) \end{cases} \Longrightarrow y_1^* = \frac{4}{5} \quad y_2^* = \frac{3}{5}$$

5 تا slack داریم : $s_1, \dots, s_5$

+ نقطه بهینه D از برخورد محدودیت ها 1 و 5 به دست می آید:

$$S_1^* = 0,\ S_5^* = 0 - S_2^*, S_3^*, S_4^* > 0 \xrightarrow{\text{قضیه لنگی مکمل}} S_i^* X_i^* = 0$$

$$\Longrightarrow \underline{X_2^* = X_3^* = X_4^* = 0} \quad \text{(I)}$$

$$y_1^* = \frac{4}{5} \quad y_2^* = \frac{3}{5} \Longrightarrow e_i^* y_i^* = 0 \longrightarrow e_1^* = e_2^* = 0 \quad \text{(II)}$$

$$\text{I, II} \Longrightarrow \begin{cases} X_1 + 3X_5 = 4 \\ 2X_1 + X_5 = 3 \end{cases} \longrightarrow \underline{X_1^* = X_5^* = 1}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تفسیر اقتصادی دوگان

(مدل برنامه ریزی تولید)

(P)

$$\max z = \sum_j c_j x_j$$

$$\sum a_{ij} x_j \leq b_i$$

$$x_j \geq 0$$

(D)

$$\min w = \sum b_i y_i$$

$$\sum a_{ij} y_i \geq c_j$$

$$y_i \geq 0$$

(x_j : میزان تولید محصول j ام a_{ij} : میزان استفاده از منبع i توسط یک واحد محصول j

b_i : حداکثر میزان دسترسی به منبع i)

* اگر فرض کنیم که یک مسئله کانونی از روی یک مدل برنامه ریزی تولید جهت حداکثرسازی سود ناشی از تولید محصولات مختلف به دست می آید:

در مسئله دوگان نظیرش می خواهیم "کل ارزش منابع مورد استفاده حداقل شود."

$\Leftarrow$ y_i : ارزش منبع i ام

* ارزش بهینه منابع مسئله P در واقع نقاط بهینه مسئله D است:

$$y^* = C_B B^{-1}$$

ارزش بهینه منبع i ام : $\longrightarrow y_i^* = \partial z / \partial b_i$

$$\partial z / \partial b = C_B B^{-1}$$

به شرط آنکه "پایه فعلی تباهیده نباشد و همچنان بهینه باقی بماند"

Subject:

Year. Month. Date. ( )

ـــ = نسبت تغییر در تابع هدف به ازای یک واحد تغییر در منبع مورد نظر.

قیمت سایه‌ای (Shadow Price) محدودیت iام = نسبت تغییر در مقدار تابع هدف

به ازای یک واحد تغییر در مقدار سمت راست.

ـ ؟ = قیمت سایه‌ای محدودیت iام

مثال:

$$\max\ Z = 5X_1 + 4X_2$$

s.t.

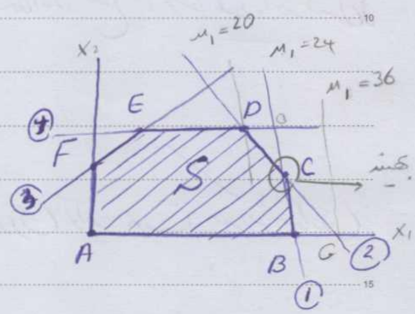
(1) $6X_1 + 4X_2 \leq 24$ ماده اولیه m_1

(2) $X_1 + 2X_2 \leq 6$ m_2

(3) $-X_1 + X_2 \leq 1$ m_3

(4) $X_2 \leq 2$ m_4

$X_1, X_2 \geq 0$



$C \rightarrow (3, \frac{3}{2}) \Rightarrow X_1^* = 3 \quad X_2^* = \frac{3}{2} \quad Z^* = 21$

m_1 و m_2 تمام می‌شوند - m_3 و m_4 باقی می‌ماند

$$\frac{\text{مقدار تغییر در تابع هدف } Z \text{ از } D \text{ به } G}{\text{مقدار تغییر در ماده اولیه } m_1 \text{ هنگامی که از } D \text{ به } G}= \frac{30-18}{36-20} = \frac{3}{4} = \frac{\partial Z}{\partial b_1}$$

(D) $\min\ w = 24y_1 + 6y_2 + y_3 + 2y_4$

(جبری): s.t. (1) $6y_1 + y_2 - y_3 \geq 5$

(2) $4y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 \geq 4$

$y_i \geq 0$

$\longrightarrow \quad y_1^* = \frac{3}{4} \quad y_2^* = \frac{1}{2} \quad y_3^* = y_4^* = 0$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$B(4,0)$ $m_1=4$ $z_1^*=20$

$D(\frac{8}{3},2)$ $m_2=\frac{20}{3}$ $z_2^*=\frac{64}{3}$

تمرین تشویقی : تغییرات m_2 به صورت هندسی

ارزش کل منابع مورد استفاده توسط هر واحد محصول j : $\underbrace{\sum a_{ij} y_i}_{} \geq c_j$

z_j = قیمت تمام شده هر واحد محصول

محدودیت های D : $z_j \geq c_j$

* P فرم کانونی :

	x_j
	$z_j - c_j < 0$
x_B	

↓

	x_j
	$\forall j: z_j - c_j \geq 0$
x_B^*	Opt

→ $z_j \geq c_j$ → محصول از لحاظ اقتصادی به صرفه است

$\boxed{\text{Simplex}}$

$$\max \ z = CX$$
$$AX \leq b$$
$$X \geq 0$$

(سمت راست +)

همواره شرط موجه بودن برقرار است، تمام x_B ها BFS هستند : $\forall i: b_i \geq 0$

برقراری شرط بهینگی : $\forall j: z_j - c_j \geq 0$ (در D موجه باشد)

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Duel Simplex

سیمپلکس دوگان

همواره شرط بهینگی برقرار باشد : $\forall j : z_j - c_j \geq 0$ (در D موجه)

$\Downarrow$

برقراری شرط موجه بودن $\forall i , b_i \geq 0$ (در P موجه)

✓ روش سیمپلکس دوگان برای حل مسئله

$$\max z = CX$$
$$AX = b$$
$$X \geq 0$$

گام شروع : در یک مسئله LP با مشخصات فوق از جوابی شروع می‌کنیم که در آن داریم :

$\forall j : z_j - c_j \geq 0$ اما به ازای بعضی i ها داریم : $\exists i ; b_i < 0$

گام انتخاب متغیر خروجی از پایه : متغیر X_{B_r} جهت خروج از پایه انتخاب می‌شود اگر

$X_{B_r} = \min \{ x_{B_i} \mid x_{B_i} < 0 \}$ شرط توقف : $\forall i : X_{B_i} \geq 0$

گام انتخاب متغیر ورودی پایه : متغیر X_k جهت ~~خروج~~ ورود به پایه انتخاب می‌شود اگر

تست نسبت روش Simplex دوگان $\rightarrow$ $\min \left\{ \frac{z_j - c_j}{|y_{rj}|} \mid y_{rj} < 0 \right\}$

$\rightarrow$ اگر در اجرای تست نسبت $\forall j : y_{rj} \geq 0$ شد ، در اینصورت مسئله D بیکران است.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

گام انجام عملیات سطری : جهت خروج X_{Br} و ورود X_k و انجام عملیات سطری

و بازگشت به گام انتخاب متغیر ورودی به پایه

* هر مسئله LP که به وسیله Simplex قابل حل باشد با D-Simplex هم قابل حل و بالعکس.

مثال :

$$\max Z = -2X_1 - X_2$$

s.t. ① $3X_1 + X_2 \geq 3$

② $4X_1 + 3X_2 \geq 6$

③ $X_1 + 2X_2 \leq 3$ تمرین تشویقی : حل با Simplex

$X_1, X_2 \geq 0$

$\Rightarrow$ ① $-3X_1 - X_2 \leq -3 \rightarrow -3X_1 - X_2 + S_1 = -3$

② $-4X_1 - 3X_2 \leq -6 \quad -4X_1 - 3X_2 + S_2 = -6$

③ $X_1 + 2X_2 \leq 3 \quad X_1 + 2X_2 + S_3 = 3$

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	2	1	0	0	0	0
S_1	-3	-1	1	0	0	-3
S_2	-4	-3	0	1	0	-6 خروجی
S_3	1	2	0	0	1	3
Z	2/3	0	0	1/3	0	-2
S_1	-5/3	0	1	-1/3	0	-1
X_2	4/3	1	0	-1/3	0	2
S_3	-5/3	0	0	2/3	1	-1

شاخص : $\min\left\{\frac{2}{|-4|}, \frac{1}{|-3|}\right\} = \frac{1}{3}$

$$\min\left\{\frac{2/3}{|-5/3|}, \frac{1/3}{|-1/3|}\right\} = 2/5 \longrightarrow X_1 \text{ ورودی}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* آغاز شروع این روش حتماً باید یک جواب اولیه شروع داشته باشیم به نحوی که در مسئله Max . $z_j - c_j \geq 0$: زیرا اما اگر بعضی یا تمام متغیرها مقادیر سمت راست منفی بودند مشکلی نیست.

* اگر چنین جوابی وجود نداشته باشد باید از روش‌های تولید جواب اولیه سیمپلکس دوگان استفاده کرد.

مطالعه ! :)

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	0	0	$2/5$	$1/5$	0	$-2\,2/5$
X_1	1	0	$-3/5$	$1/5$	0	$3/5$
X_2	0	1	$-4/5$	$-3/5$	0	$6/5$
S_3	0	0	-1	1	1	0

شرط توقف : $\forall i : b_i \geq 0 \rightarrow \quad X_1^* = 3/5 \quad X_2^* = 6/5 \quad Z^* = -2\,2/5$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Sensitivity Analysis

تجزیه و تحلیل حساسیت

در تجزیه و تحلیل حساسیت بعد از آنکه جواب بهینه مسئله LP بدست آمد، به بررسی اینکه در اثر تغییر در داده‌های مسئله در جواب بهینه چه تغییری رخ می‌دهد می‌پردازیم

$$(LP)\quad \begin{aligned} \max\ & z = CX \\ & AX = b \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

	X_j	
z	$C_B B^{-1} a_j - C_j$	$C_B B^{-1} b$
X_B	$B^{-1} a_j$	$B^{-1} b$

Opt.

مثال:

$$\max\ Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} &① \quad X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 450 \to 602 \\ &② \quad 3X_1 + 2X_3 \leq 400 \to 644 \\ &③ \quad X_1 + 4X_2 \leq 420 \to 588 \\ &\qquad X_i \geq 0 \end{aligned}$$

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	4	0	0	1	2	0	1350
X_2	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	100
X_3	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	230
S_3	2	0	0	-2	1	1	20

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

① $b_{Current} \longrightarrow b_{New}$: $\checkmark\ (X_B)_{Current} \longrightarrow (X_B)_{New} = B^{-1} b_{New}$

$\checkmark\ Z_{Current} \rightarrow Z_{New} = C_B B^{-1} b_{New}$

$(X_B)_{New} \geq 0 \Rightarrow$ (پایه فعلی بهینه است (سمت راست مثبت و $Z_j - C_j$ ها تغییر نکرده)

$(X_B)_{New}$: (حداقل یکی از عناصرش منفی شود) $\Rightarrow$ با D-Simplex ادامه می‌دهیم

$$(X_B)_{New} = B^{-1} b_{New} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 602 \\ 644 \\ 588 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 322 \\ 28 \end{pmatrix}$$

$Z_{New} = (2, 5, 0)(X_B)_{New} = 1890 \rightarrow$ همین مسئله تغییر نکرده

② تغییر در ضرایب تابع هدف (C_j ها)

2-1 . تغییر در C_j یک متغیر غیرپایه نظیر X_j : (Max)

$(Z_j - C_j)_{Cu} \longrightarrow (Z_j - C_j)_{New}$

$\checkmark\ (Z_j - C_j)_{New} = C_B B^{-1} a_j - (C_j)_{New}$

$\geq 0 \Rightarrow$ جواب بهینه فعلی تغییر نمی‌کند

$< 0 \Rightarrow$ ادامه با روش Simplex

P4PCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

* در تابع هدف : ضریب x_1 : $3 \longrightarrow 5$

جواب فعلی هم‌چنان ← $(Z_1-C_1)_{New} = \underbrace{C_B}_{(1,2,0)} B^{-1}a_j - (C_j)_{New} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 > 0$

بهینه است.

راه ساده‌تر : فقط در c_j تغییر داده ...

2-2 : تغییر در c_j یک متغیر پایه (C_B تغییر می‌کند) : { z_j-c_j پایه‌ها 0 می‌مانند }!!

$\forall j \in NBV : (Z_j-C_j)_C \longrightarrow (Z_j-C_j)_{New}$

$(Z_j-C_j)_{New} = (C_B)_{New} B^{-1}a_j - (C_j)_{New} \longrightarrow \forall j \in NBV : \geq 0$ ← بهـ

$\searrow \exists j : < 0$ ← بهـ

* در تابع هدف : $3 \longrightarrow 5 \qquad 2 \longrightarrow 3 \qquad 5 \longrightarrow 4$

$(C_B)_{C} = (2, 5, 0) \longrightarrow (C_B)_{New} = (3, 4, 0)$

$(Z_1-C_1)_{New} = (C_B)_N B^{-1} b - (C_1)_{New} = \frac{1}{4}$

$*(C_B)_N B^{-1} = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, 0\right)$

$(Z_2-C_2)_{New} = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, 0\right) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - (C_2)_{New} = 3-3=0$

$B^{-1}a_j = y_i$ همیشه اینطوره

$\downarrow$

$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

③ اضافه کردن متغیر جدید x_j :

اضافه شدن متغیر جدید X_{n+1} به مسئله LP به منزله تغییر در ضرایب آنهاست :

$$C_{n+1}=0 \longrightarrow (C_{n+1})_{New}$$
$$a_{n+1}=0 \longrightarrow (a_{n+1})_{New}$$

در این هنگام ستون X_{n+1} را به جدول جدید اضافه می‌کنیم ، به نحوی که

$$B^{-1}(a_{n+1})_{New} \quad , \quad Z_{n+1}-C_{n+1} = C_B B^{-1} a_{n+1} - C_{n+1}$$

* X_7 را داریم ، $C_7=4$ ، $a_7=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$:

$$Z_7-C_7 = C_B B^{-1} a_7 - C_7 = (2,5,0)(\uparrow) - 4 = -1$$

$$B^{-1}a_7 = \begin{pmatrix}1/2 & -1/4 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/4\\1/2\\1\end{pmatrix}$$

④ حذف کردن متغیر x_j :

* اگر متغیری که می‌خواهیم حذف کنیم در جدول بهینه غیرپایه ای باشد که جواب بهینه فعلی تغییر نمی‌کند . (مقدارش صفر است)

* برای حذف کردن یک متغیر پایه فعلی کافی است ضریب آن را در تابع هدف ،

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ضریب نامناسبی تبدیل کنیم:

$(C_j)_{New} \xrightarrow{Max} -M$

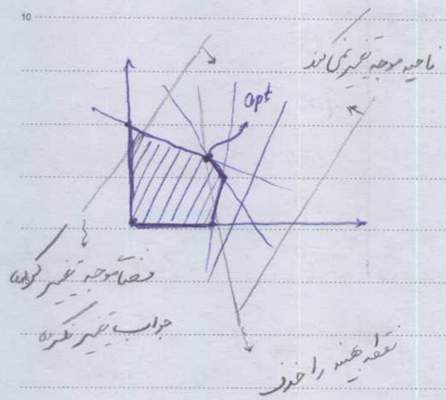
$(C_j)_{New} \xrightarrow{Min} +M$

* X_2: حذف: $C_2 = 2 \longrightarrow -M$

سطر Z: $\frac{9}{2}+\frac{1}{4}M \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{1}{2}M \quad \frac{1}{4}M+\frac{5}{2} \quad 0$

$\{ C_B = (-M, 5, 0) \qquad C_B B^{-1} = (-\frac{1}{2}M, \frac{1}{4}M+\frac{5}{2}, 0) \}$

5) اضافه کردن محدودیت جدید:



در این حالت، ابتدا جواب بهینه فعلی در محدودیت جدید بررسی می شود که اگر در آن صدق کند یعنی آن است که محدودیت جدید تأثیری در جواب بهینه فعلی ندارد اما اگر در آن صدق نکند یعنی محدودیت جدید باعث حذف نقطه بهینه فعلی شده است. در اینصورت محدودیت جدید به انتهای جدول بهینه اضافه شده (آ این منظور متغیری وابسته به محدودیت به عنوان متغیر پایه اضافه می شود) و مسئله با روش D-Simplex ادامه می یابد «بعد از انجام عملیات سطری».

Subject:
Year. Month. Date. ( )

1. $X^* = (0, 100, 230)$ اضافه : $3X_1 + X_2 + X_3 \leq 500$

جواب بهینه فعلی در آن صدق می‌کند $\longrightarrow$ جواب بهینه تغییر نمی‌کند

2. اضافه : $3X_1 + 3X_2 + X_3 \leq 500$ صدق نمی‌شد! $\longrightarrow$ $530 \nleq 500$

$$3X_1 + 3X_2 + X_3 + S_4 = 500$$

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	RHS
Z	0	0	0	1	2	0	0	1350
X_2	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	0	100
X_3	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	0	230
S_3	2	0	0	-2	1	1	0	20
S_4	3	3	1	0	0	0	1	500

ج: Simplex ثنوی

$\Downarrow$

S_4	$9/4$	0	0	$-3/2$	$1/4$	0	1	-30

...

⑥ تغییر در ضرایب ستون‌های تشکیل دهنده A : $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

x_j	
$C_B B^{-1} a_j - c_j$	$C_B B^{-1} b$
$B^{-1} a_j$	$B^{-1} b$

6-1) تغییر در a_j وابسته به یک متغیر غیرپایه : در این حالت $z_j - c_j$ و بردار y_j وابسته به متغیر تغییر می‌کند :

$$(z_j - c_j)_{New} = C_B B^{-1} (a_j)_{New} - c_j$$

(max) → ≥ 0 ⇒ جواب بهینه فعلی تغییر نمی‌کند

→ < 0 ⇒ ادامه با روش S

* $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow a_{New} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad (z_1 - c_1)_{New} = (1, 2, 0) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - 3 = -3$

$(y_1)_{New} = B^{-1} (a_1)_{New} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ خروجی x_2 ← ورودی : x_1

6-2) اگر a_j وابسته به متغیر پایه‌ای تغییر کند در این حالت در حقیقت ماتریس B و در نتیجه B^{-1} تغییر می‌کند.

x_j از مسئله حذف می‌شود

$c_j \to -M$:

$x_j < \begin{matrix} a_j \\ c_j \end{matrix} \quad — \quad \begin{matrix} a'_j \\ c_j \end{matrix} > x'_j$

در این حالت ابتدا فرض می‌کنیم متغیر جدیدی نظیر x'_j با بردار ستونی a'_j و ضرایب

c_j به مسئله اضافه شده و هم چنین سعی می کنیم که به صورت هم زمان X_j با تغییر در ضریب c_j از مسئله حذف شود. در صورتی که در نهایت در جواب نهایی مسئله X_j در پایه قرار نگرفت جواب بهینه جدید به دست می آید و در غیر این صورت اگر $X_j^* > 0$ ، مسئله دارای جواب موجه نمی باشد.

مثال: $Max\ Z = 2X_1 + 3X_2 + X_3 + 2X_4$

Optimal Solution

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	RHS	X_1'
					Slacks			
Z	0	1 $-\frac{3}{4}M - \frac{1}{2}$	3 $-\frac{1}{4}M + \frac{5}{2}$	0	2 $-\frac{1}{4}M + \frac{3}{2}$	0 $-\frac{1}{4}M - \frac{1}{2}$	12	$-\frac{1}{2}M - 4$
X_4	0	$5/4$	$7/4$	1	$3/4$	$-1/4$	4	
X_1	1	$3/4$	$1/4$	0	$1/4$	$1/4$	2	

$$a_1 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \longrightarrow \left\{ a' = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right. \longrightarrow$$ اضافه شدن متغیر X_1' جدید

$$\underbrace{c_1 = 2}_{-M} \longrightarrow c_1' = 5$$

X_1 حذف

$$(Z_j - C_j)_{New} = (2, -M)\, B^{-1} a_j - C_j$$

$\underline{X_1'}$ مربوط به $(Z_j - C_j) = (2, -M) \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - 5 = -\frac{1}{2}M - 4$

X_2 : وارد $\quad X_1$: خارج ...

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اثر تغییرات همزمان در پارامترها ← Winston (قوانین 100%)

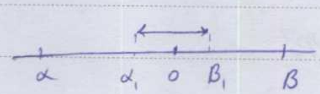
برنامه ریزی پارامتری (حل) Parametric Linear Programming

$$\max\ z=(c+td)x$$
$$Ax=b$$
$$x\geq 0$$
$$\alpha\leq t\leq\beta$$

* ضرایب بردارهای c و d داده شده است.

* مسئله LP در واقع حالت خاصی از این مسئله است وقتی $t=0$.

* اگر $\alpha\leq t=0\leq\beta$ باشد در این حالت ابتدا مسئله را حل می‌کنیم سپس با تحلیل حساسیت دامنه آن نظیر (α_1,β_1) که جواب فعلی هم چنان بهینه است را بدست آورده و سپس با گسترش دامنه، نواحی دیگر سپس در حل مسئله در تمام بازه (α,β) می‌نماییم.



مثال :
$$\max\ z=(1-2t)x_1+(3-t)x_2$$
$$① \quad x_1+x_2+S_1=6$$
$$② \quad -x_1+2x_2+S_2=6$$
$$t\geq 0$$
$$x_1,x_2,S_1,S_2\geq 0$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

		X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
	Z	$-1+2t$	$-3+t$	0	0	0
	S_1	1	1	1	0	6
$t=0$	S_2	-1	$\underline{2}$	0	1	6
	Z	0	0	$5/3 - 5/3\,t$	$2/3 - 1/3\,t$	$14-8t$
	X_1	1	0	$\boxed{2/3}$	$-1/3$	2
$t=0$	X_2	0	1	$1/3$	$1/3$	4

$$C:(1,3) \longrightarrow (1-2t,\ 3-t) \qquad (Z_j - C_j)_{New} = (1-2t,\ 3-t)\,B^{-1}a_j - C_j$$

$$(Z_j - C_j)_{S_1} = 5/3 - 5/3\,t$$
$$(Z_j - C_j)_{S_2} = 2/3 - 1/3\,t$$

$$\begin{cases} 5/3 - 5/3\,t \geq 0 \\ 2/3 - 1/3\,t \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow 0 \leq t \leq 1$$

opt.

if $t > 1 \rightarrow S_1$: وارد X_1 خارج

					RHS
Z	$-5/2 + 5/2\,t$	0	0	$3/2 - 1/2\,t$	$9-3t$
S_1	$3/2$	0	1	$-1/2$	3
X_2	$-1/2$	1	0	$1/2$	3

Subject:
Year. Month. Date. ( )

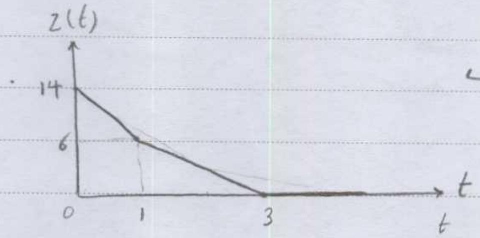
$$\begin{cases} -\frac{5}{2} + \frac{5}{2} t \geq 0 \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} t \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow 1 \leq t \leq 3$$

اگر $t > 3$ ← S_2 : وارد X_2 : خارج   ⇐ $\underbrace{S_1 , S_2}_{\text{پایه}}$

← به جدول اولیه رسیدیم : اگر $t \geq 3$ بهینه است

* خلاصه نتایج برنامه ریزی پارامتری مسئله   *** در امتحان حتماً نوشته شود

$t \backslash x^*$	x_1^*	x_2^*	z^*
$0 \leq t \leq 1$	2	4	$14-8t$
$1 \leq t \leq 3$	0	3	$9-3t$
$t \geq 3$	0	0	0



تابع قطعه قطعه خطی محدب

برنامه ریزی پارامتری روی تابع هدف max

اگر $t=1$, $t=3$ ← ترکیب متغیرهای پایه عوض می شود اما z^* ثابت ⇐

جواب چندگانه.

اثبات ریاضی ← $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ با تابع بسنجید

PAPCO

irmgn.ir

Subject:

Year. Month. Date. ( )

برنامه ریزی پارامتری در حالتی که مقادیر سمت راست پارامتری است ← کتاب ۱