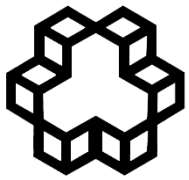


دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده مهندسی صنایع

مسئله کوتاه ترین مسیر

حسین کریمی

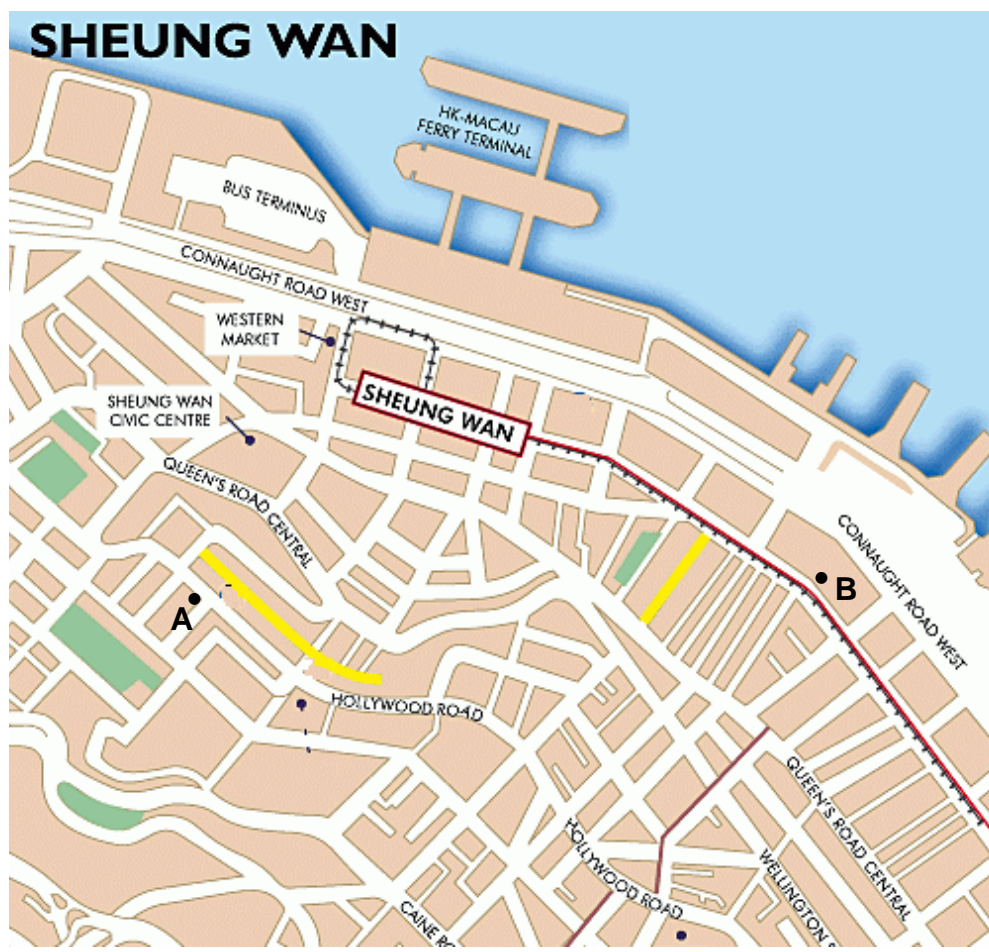


دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

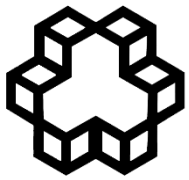
دانشکده مهندسی صنایع

سوال؟؟

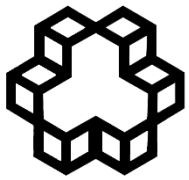
کوتاه ترین مسیر برای رفتن از نقطه A به نقطه B چیست؟



اگر برخی از مسیرها یک طرفه باشند، آنگاه مسئله چطور خواهد شد؟



- این مسئله یکی از مهم‌ترین و پایه‌ای‌ترین مسائل موجود در شبکه‌های حمل و نقلی است. از دلایل اهمیت مطالعه این مسئله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.
- متناوبا در مسائل حمل و نقلی تکرار می‌شود و به عنوان یک زیر مسئله در الگوریتم‌های سطح بالا است.
 - به راحتی و با عملکرد خوبی قابل حل است.
 - ویژگی‌های ضروری مدل‌های جریان شبکه را دارا می‌باشد.
 - نقطه آغازی برای آشنایی با طراحی الگوریتم مناسب برای مسائل حمل و نقلی است.

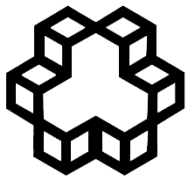


همانطور که از نام این موضوع پیداست، مسئله هنگامی ایجاد می‌شود که نیاز به یافتن ارزان‌ترین، کوتاه‌ترین و یا قابل اعتمادترین مسیر برای انتقال جریان بین نقاط وجود داشته باشد.

مسئله کوتاه‌ترین مسیر به سه نوع مختلفی که در ادامه بیان می‌شود، تقسیم می‌گردد.

- یافتن کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه؛
 - یافتن کوتاه‌ترین مسیر بین یک نقطه و باقی نقاط؛
 - یافتن کوتاه‌ترین مسیر بین همه نقاط با هم.
- هر کدام از این سه نوع مسئله، با توجه به مقادیر کمان‌های موجود در شبکه می‌تواند به دو طبقه زیر تقسیم شوند.

- مقادیر کمان‌ها نامنفی باشند.
- محدودیتی برای مقادیر کمان‌ها موجود نیست.



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده مهندسی صنایع

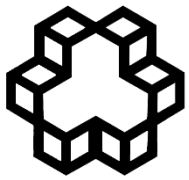
کاربردهای مسئله کوتاه‌ترین مسیر

شبکه‌های کامپیوتری.

شبکه ارتباطی برای انتقال داده‌ها شامل رایانه‌ها و پیوندهای ارتباطی هستند که بیت‌های اطلاعاتی را از مبادی به مقصدهایشان ارسال می‌کنند. برای انتقال این جریان داده از مسئله کوتاه‌ترین مسیر استفاده می‌شود.

کنترل پروژه.

عموما مدیران پروژه به دنبال این موضوع هستند که کم‌ترین زمان پایان پروژه چقدر است. با در نظر گرفتن شروع و پایان فعالیت‌ها به عنوان یک گره و زمان انجام فعالیت‌ها به عنوان یک کمان، می‌توان گرافی را ایجاد کرد. برای پیدا کردن کوتاه‌ترین زمان پایان پروژه باید مسئله کوتاه‌ترین مسیر را بین نقطه شروع و نقطه پایان پروژه حل کرد. این مسئله نیز دارای محدودیت‌های همانند پیش‌نیازی فعالیت‌ها و یا ظرفیت منابع می‌باشد.



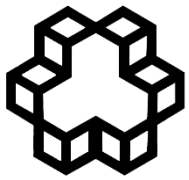
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده مهندسی صنایع

کاربردهای مسئله کوتاه‌ترین مسیر

برنامه‌ریزی پویا.

اگر در برنامه‌ریزی پویا هر وضعیت را یک گره و مسیر بین یک وضعیت در یک مرحله و وضعیت دیگر در مرحله بعد را کمان در نظر بگیرید، آنگاه گرافی خواهید داشت که برای رفتن از مرحله اول به مرحله آخر، می‌توان کوتاه‌ترین مسیر را پیدا کرد تا مسئله در زمان کمتری حل شود.



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده مهندسی صنایع

کاربردهای دیگر

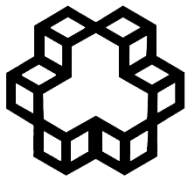
حرکت روبات ها

تنظیم نوشتار در TeX ها

برنامه ریزی ترافیک شهری

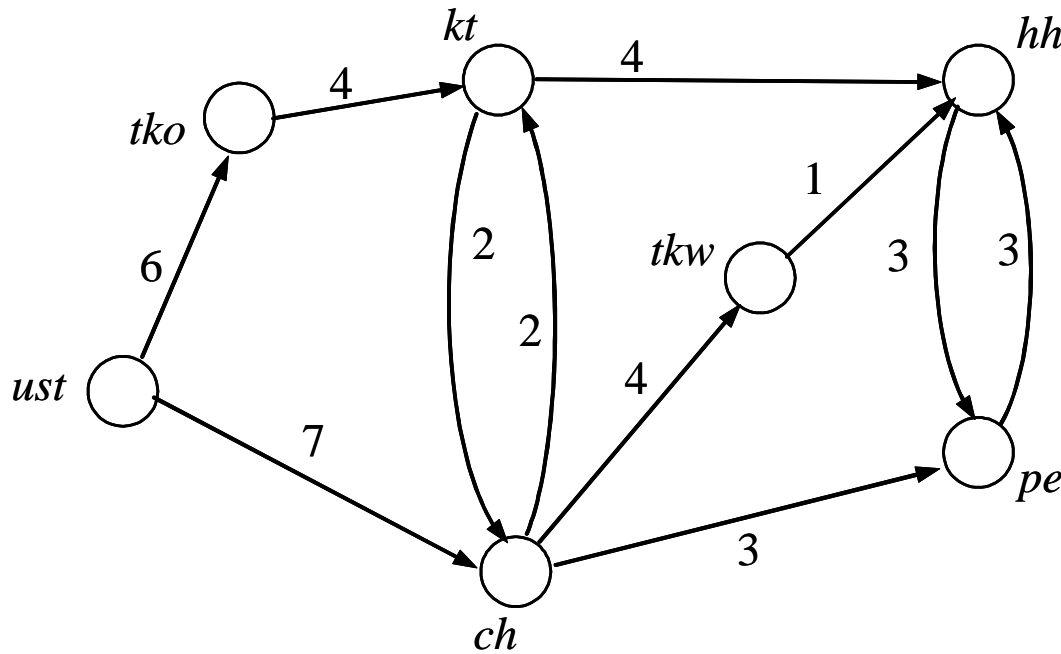
لوله کشی ها

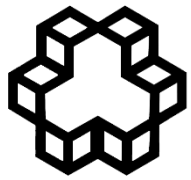
تقریب تابع قطعه قطعه خطی



تعریف مسئله

یک گراف جهت دار وزن دار داده شده است، $G(N,A)$ ، از گره s مسیر باید شروع شود و به t ختم شود، کوتاه ترین مسیر وزن دار بین این دو گره کدام است؟





دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده مهندسی صنایع

مدل ریاضی

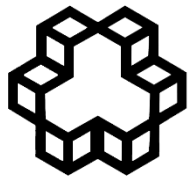
$$\min \sum_{(i,j) \in A} a_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j:(s,j) \in A} x_{sj} - \sum_{j:(j,s) \in A} x_{js} = 1$$

$$\sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in A} x_{ji} = 0 \quad i \in N \setminus s, t$$

$$\sum_{j:(t,j) \in A} x_{tj} - \sum_{j:(j,t) \in A} x_{jt} = -1$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i,j) \in A$$



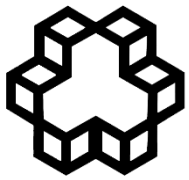
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده مهندسی صنایع

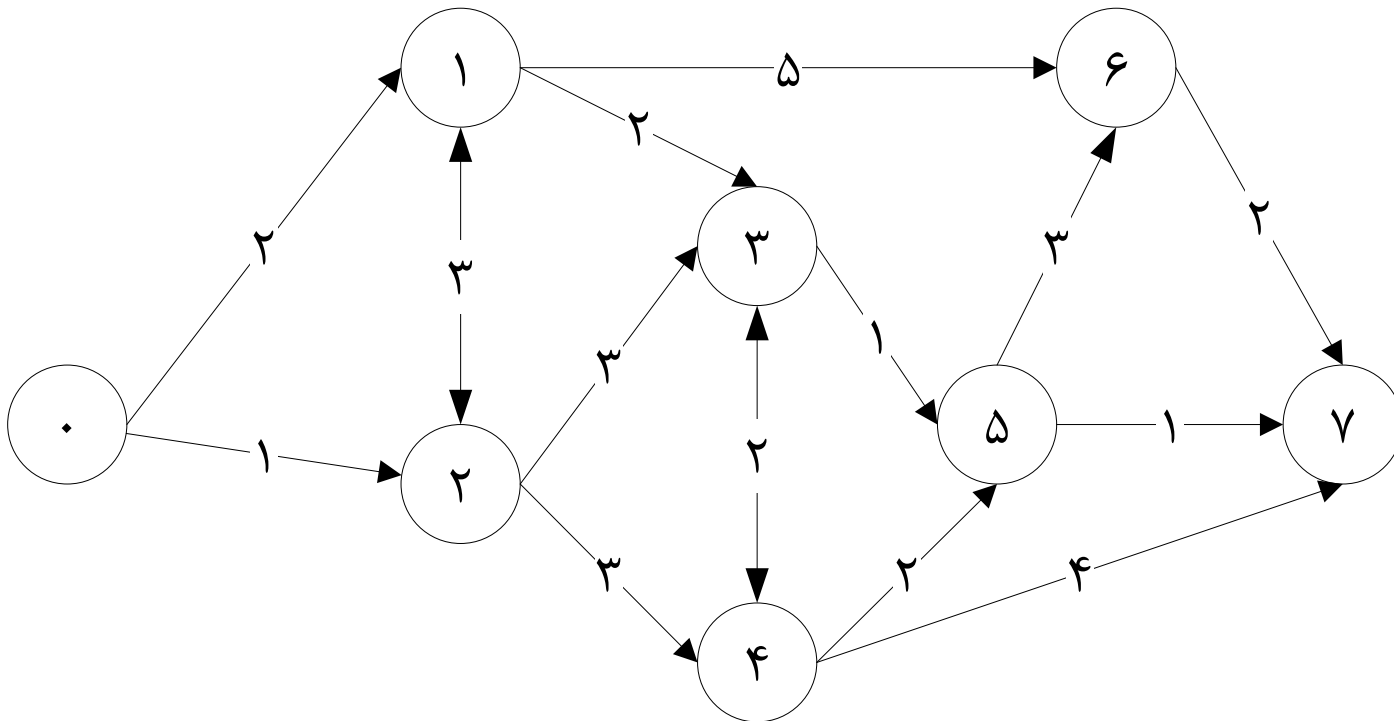
مدل ریاضی آزاد شده خطی

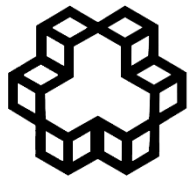
به دلیل این که ضرایب فنی محدودیت‌ها یک ماتریس تک کالبدی کامل (Totally Unimodular Matrix) است (قضیه هافمن و کروسکال (۱۹۵۶)). جواب آزادسازی خطی آن با جواب اصلی مسئله برابر است.

پس می‌توان محدودیت $x_{ij} \in \{0,1\}$ را می‌توان به $x_{ij} \geq 0$ تبدیل کرد.



مدل ریاضی کوتاه ترین مسیر بین گره صفر و هفت را بنویسید.





دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده مهندسی صنایع

حل مثال

$$\min \quad 2x_{01} + x_{02} + 3x_{12} + 2x_{13} + 5x_{16} + 3x_{21} + 3x_{23} + 3x_{24} + 2x_{34} + x_{35} + 2x_{43} + 2x_{45} + 4x_{47} + 3x_{56} + x_{57} + 2x_{67}$$

$$x_{01} + x_{02} = 1;$$

$$x_{12} + x_{13} + x_{16} - x_{01} - x_{21} = 0; \quad x_{21} + x_{23} + x_{24} - x_{02} - x_{12} = 0;$$

$$x_{34} + x_{35} - x_{13} - x_{23} - x_{43} = 0; \quad x_{43} + x_{45} + x_{47} - x_{24} - x_{34} = 0;$$

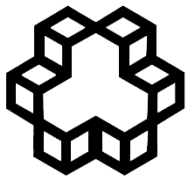
$$x_{57} + x_{56} - x_{35} - x_{45} = 0; \quad x_{67} - x_{16} - x_{56} = 0;$$

$$-x_{47} - x_{57} - x_{67} = -1$$

$$x_{01}, x_{02}, x_{12}, x_{13}, x_{16}, x_{21}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, x_{35}, x_{43}, x_{45}, x_{47}, x_{56}, x_{57}, x_{67} \in \{0,1\}$$

جواب مدل ریاضی مطرح شده برای مثال به صورت زیر است و مقدار تابع هدف برابر ۶ خواهد شد.

$$x_{01} = 1, \quad x_{13} = 1, \quad x_{35} = 1, \quad x_{57} = 1$$

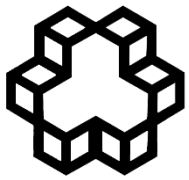


دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده مهندسی صنایع

سوال

- ✓ سوال : به نظر شما، آیا جواب بیان شده، تنها جواب مسئله است؟ اگر جواب‌های دیگری وجود دارد، آن‌ها را بیابید.
- ✓ سوال: تعداد محدودیت‌های فعال در مسئله کوتاه‌ترین مسیر چقدر است؟



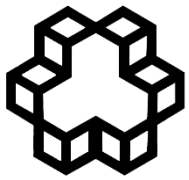
بهبود مدل سازی

از آن جا که رتبه ماتریس ضرایب تکنولوژی برابر تعداد محدودیت‌ها نمی‌باشد و یک واحد از آن کمتر است، می‌توان محدودیت آخر مسئله را بدون هیچ تغییری در مقدار جواب مسئله حذف کرد. در واقع بدون وجود این محدودیت، مسئله دارای همان مقدار جواب خواهد بود. با حذف این محدودیت و جمع کردن محدودیت اول با تمامی محدودیت‌های دیگر، مدل زیر ایجاد خواهد شد.

$$\min \sum_{(i,j) \in A} a_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in A} x_{ji} = 1 \quad i \in N \setminus t$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i,j) \in A$$

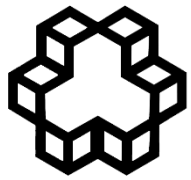


دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده مهندسی صنایع

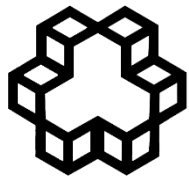
الگوریتمهای حل

- الگوریتم دایجکسترا
- الگوریتم اولیه-ثانویه
- الگوریتم جانسون
- الگوریتم بلمن - فورد
- الگوریتم فلوید- وارشال



الگوریتم دایجسترا

- روش دایجسترا به نام ارائه دهنده آن نام گذاری شده است (Dijkstra, 1959).
- این روش با منطق برچسب گذاری عمل می کند.
- این الگوریتم برای پیدا کردن کوتاه ترین مسیر از یک گره، که گره ریشه نامیده می شود، به تمامی دیگر گره ها در یک شبکه جهت دار یا غیر جهت دار استفاده می شود.
- حاصل الگوریتم یک درخت گسترده خواهد بود که از گره ریشه منشعب شده و به بقیه گره ها، در صورت امکان، ارتباط پیدا می کند.
- این درخت، درخت کوتاه ترین مسیرهای گسترده شده یا کوتاه ترین مسیر درختی ریشه گرفته از یک گره مشخص نامیده می شود.



گام های الگوریتم دایجکسترا

مرحله آغازین: برای هر گره $u \in A \setminus s$ ، مقدار $d(u) = \infty$ قرار دهید و یک متغیر پرچم با نام $flag$ را تعریف کنید و $flag(u) = 0$ قرار دهید. پیش‌نیاز تمامی این گره‌ها را تهی قرار دهید (یعنی $pred(u) = \phi$). برای گره آغازین $d(s) = 0$ ، $flag(s) = 0$ و $pred(s) = \phi$. صافی از تمامی گره‌هایی که $flag = 0$ را در مجموعه Q قرار دهید.

مرحله تکراری: گام‌های زیر را تا هنگامی که مجموعه $Q \neq \phi$ یا $t \in Q$ (گره مقصد است) انجام دهید.

(۱) در گره‌های $u \in Q$ گرهی که کمترین مقدار $d(u)$ را دارد بدست آورید و $index$ بنامید.

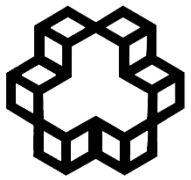
(۲) برای هر گره v که از $index$ به آن کمان مستقیم است، مراحل زیر را انجام دهید.

$$I. \quad flag(index) = 1$$

$$II. \quad Q = Q \setminus index$$

III. اگر $d(index) = \infty$ آن‌گاه مسئله نشدنی است و از حل خارج شوید.

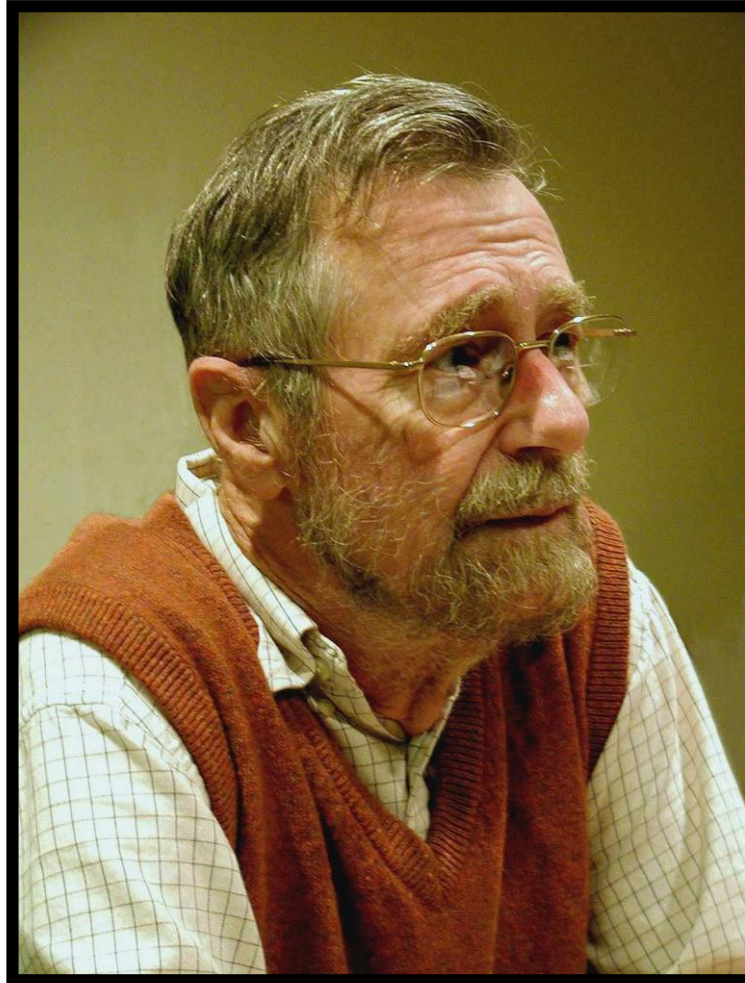
IV. اگر $d(index) + a(index, v) < d(v)$ آنگاه $d(v) = d(index) + a(index, v)$ و $pred(v) = index$.

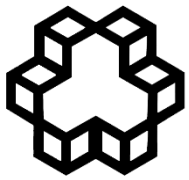


دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده مهندسی صنایع

Prof Edsger Dijkstra [1930-2002]





دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده مهندسی صنایع

عیب الگوریتم دایجکسترا

هنگامی که وزن ها منفی باشد، قابل استفاده نیست.