۳-۳- محاسبه نرخ ناسازگاری

یک ماتریس مقایسه ممکن است سازگار و یا ناسازگار باشد. در ماتریس سازگار محاسبه وزن ساده بوده و با استفاده از نرمال‌سازی تک‌تک ستون‌ها به‌دست می‌آید، در حالی که برای محاسبه وزن در ماتریس ناسازگار از روش‌های مختلفی استفاده می‌شود. علاوه بر محاسبه وزن در ماتریس‌های ناسازگار، محاسبه مقدار ناسازگاری از اهمیت بالایی برخوردار است. در حالت کلی می‌توان گفت که میزان قابل قبول ناسازگاری یک ماتریس یا سیستم بستگی به تصمیم‌گیرنده دارد، اما ساعتی عدد ۰/۱ را به‌عنوان حد قابل قبول ارائه می‌نماید و معتقد است چنان‌چه میزان ناسازگاری بیشتر از ۰/۱ باشد، بهتر است در قضاوت تجدید نظر گردد.

۳-۳-۱- ماتریس سازگار

اگر n معیار به شرح $c_۱, c_۲, \dots, c_n$ داشته باشیم و ماتریس مقایسه زوجی آنها به‌صورت زیر باشد:

رابطه ۳-۱۷
$$A = [a_{ij}];\ i, j = ۱, ۲, \dots, n$$

که در آن a_{ij} ترجیح عنصر c_i را بر c_j نشان می‌دهد، چنان‌چه در این ماتریس داشته باشیم:

رابطه ۳-۱۸
$$a_{ik} * a_{kj} = a_{ij};\ \ i, j, k = ۱, ۲, \dots, n$$

آنگاه می‌گوییم ماتریس A سازگار است.

۳-۳-۲- ماتریس ناسازگار

در این قسمت می‌خواهیم بدانیم که اگر ماتریس مقایسه زوجی ناسازگار باشد، میزان ناسازگاری ماتریس چه مقدار بوده و آن را چگونه اندازه‌گیری می‌کنیم. قبل از بیان معیار اندازه گیری ناسازگاری، به چند قضیه مهم درباره هر ماتریس مقایسه زوجی اشاره می‌شود:

قضیه ۱: اگر $\lambda_۱, \lambda_۲, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس مقایسه زوجی A باشد، مجموع مقادیر آن برابر n است:

رابطه ۳-۱۹
$$\sum \lambda_i = n$$

قضیه ۲: بزرگترین مقدار ویژه (λ_{max}) همواره بزرگتر یا مساوی n است (در این‌صورت، برخی از λها منفی خواهند شد):

رابطه ۳-۲۰
$$\lambda_{max} \geq n$$

قضیه ۳: اگر عناصر ماتریس مقدار کمی از حالت سازگاری فاصله بگیرند، مقادیر ویژه آن نیز مقدار کمی از حالت سازگاری خود فاصله خواهند گرفت.

از طرف دیگر طبق تعریف برای هر ماتریس مربعی A رابطه زیر را خواهیم داشت:

رابطه ۳-۲۱
$$A * w = \lambda . w$$

که در آن λ و w به ترتیب مقدار ویژه و بردار ویژه ماتریس A می‌باشند. در حالتی‌که ماتریس A سازگار باشد، یک مقدار ویژه برابر n بوده (بزرگترین مقدار ویژه) و بقیه آنها برابر صفر هستند. بنابراین در این حالت می‌توان نوشت:

رابطه ۳-۲۲
$$A * w = n . w$$

در حالتی‌که ماتریس مقایسه زوجی A ناسازگار باشد، طبق قضیه ۳، λ_{max} کمی از n فاصله می‌گیرد که می‌توان نوشت:

رابطه ۳-۲۳
$$A * w = \lambda_{max} . w$$

دلیل استفاده از λ_{max} طبق قضیه ۳ این است که کمترین فاصله را از n خواهد داشت. از آنجا که λ_{max} همواره بزرگتر یا مساوی n است و چنان‌چه ماتریس از حالت سازگاری کمی فاصله بگیرد، λ_{max} از n کمی فاصله خواهد گرفت؛ تفاضل λ_{max} و n $(\lambda_{max} - n)$ به مقدار n بستگی دارد. برای رفع این وابستگی، می‌توان مقیاس را به‌صورت زیر تعریف نمود که آن را شاخص ناسازگاری (I.I.) می‌نامیم.

رابطه ۳-۲۴
$$I.I. = \frac{\lambda_{max} - n}{n - ۱}$$

مقادیر شاخص ناسازگاری (I.I.) را برای ماتریس‌هایی که اعداد آنها کاملا تصادفی اختیار شده باشند، محاسبه کرده‌اند و آن را شاخص ناسازگاری ماتریس تصادفی (I.I.R.) نام نهاده‌اند، که مقادیر آنها برای ماتریس‌های n بُعدی مطابق جدول ۳-۱ است.

جدول ۳-۱- مقادیر شاخص ناسازگاری ماتریس تصادفی

n	۱	۲	۳	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
I.I.R.	۰	۰	۰.۵۸	۰.۹	۱.۱۲	۱.۲۴	۱.۳۲	۱.۴۱	۱.۴۵	۱.۴۹	۱.۵۱	۱.۴۸

برای هر ماتریس، حاصل تقسیم شاخص ناسازگاری (I.I.) بر شاخص ناسازگاری ماتریس تصادفی (I.I.R.) هم بُعدش، معیار مناسبی برای قضاوت در مورد ناسازگاری می‌باشد، که آن را نرخ ناسازگاری (I.R.) می‌نامیم. چنان‌چه این عدد کوچکتر یا مساوی ۰/۱ باشد، سازگاری سیستم قابل قبول است وگرنه باید در قضاوت‌ها تجدید نظر نمود.

رابطه ۳-۲۵
$$I.R. = \frac{I.I.}{I.I.R.}$$

۳-۳-۲-۱- الگوریتم محاسبه نرخ ناسازگاری یک ماتریس

با توجه به قضایای ۱ تا ۳ و نتایج آنها، نرخ ناسازگاری هر ماتریس را طبق مراحل زیر می‌توان به‌دست آورد:

۱- ماتریس مقایسه زوجی A را تشکیل دهید.

۲- بردار وزن (w) را مشخص نمایید. در اینجا این بردار را از روش میانگین حسابی به‌دست می‌آوریم. بدین منظور، ابتدا باید مجموع عناصر هر ستون محاسبه شود. سپس هر ستون با تقسیم درایه‌هایش بر درایه مجموع، نرمال‌سازی می‌شود. نهایتا میانگین عناصر هر سطر ماتریس محاسبه شده تا بردار وزن به‌دست آید.

۳- آیا بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A (یعنی λ_{max}) مشخص است؟ اگر پاسخ مثبت است، به قدم چهارم بروید. در غیر این‌صورت، با توجه به قدم‌های زیر مقدار آن را تخمین می‌زنیم:

- با ضرب بردار w در ماتریس A، تخمین مناسبی از $\lambda_{max}.w$ به‌دست می‌آید:

رابطه ۳-۲۳
$$A * w = \lambda_{\text{max}}.\, w$$

- با تقسیم مقادیر به‌دست آمده برای $\lambda_{max}.w$ بر w مربوطه، تخمین‌هایی از λ_{max} محاسبه می‌شود.

- متوسط λ_{max} های به‌دست آمده محاسبه می‌گردد.

۴- مقدار شاخص ناسازگاری (I.I.) محاسبه می‌شود.

رابطه ۳-۲۴
$$\text{I. I.} = \frac{\lambda_{\text{max}} - \text{n}}{\text{n} - ۱}$$

۵- نرخ ناسازگاری (I.R.) از روش زیر به‌دست می‌آید:

رابطه ۳-۲۵
$$\text{I. R.} = \frac{\text{I. I.}}{\text{I. I. R.}}$$

۳-۳-۳- محاسبه سازگاری ماتریس‌های مقایسات زوجی فازی

گاگوس و بوچر[۱] (۱۹۹۸) در مقاله خود برای محاسبه درجه سازگاری ماتریس‌های مقایسات زوجی فازی پیشنهاد کردند که از هر ماتریس مقایسه زوجی $\tilde{A}_{n*n}$ دو ماتریس عدد میانی (A^m) و ماتریس حدود عدد فازی (A^{g}) مشتق شده و سپس سازگاری هر یک از این دو ماتریس بر اساس روش ساعتی، که در بخش ۳-۳-۲-۱ توصیف شد، محاسبه شود. ماتریس A^m از مقادیر میانی اعداد فازی مثلثی حاصل از ماتریس ادغام نظرات خبرگان به‌دست آمده ($A^m = [a_{ijm}]$) و ماتریس حدود فازی نیز شامل میانگین هندسی حدود بالا و پایین اعداد فازی مثلثی خواهند بود ($A^{\text{g}} = [\sqrt{a_{ijl} * a_{iju}}]$). البته لازم به ذکر است که گاگوس و بوچر در مقاله خود برای هر یک از این دو ماتریس، شاخص‌های تصادفی متفاوتی ($\text{I. I. R.}^{\text{m}}$ و $\text{I. I. R.}^{\text{g}}$) معرفی کرده‌اند که در

---

[۱] Gogus and Boucher

جدول ۳-۲ مقادیر آنها آورده شده است. در نتیجه، در مرحله پنجم محاسبه نرخ ناسازگاری این دو ماتریس، از این نوع شاخص‌های تصادفی استفاده خواهد شد.

جدول ۳-۲- شاخص‌های تصادفی گاگوس و بوچر

n	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
$I.\,I.\,R.^{m}$	٠	٠	٠.۴٨٩	٠.٧٩٣٧	١.٠٧٢	١.١٩٩۶	١.٢٨٧۴	١.٣۴١	١.٣٧٩٣	١.۴٠٩۵	١.۴١٨١	١.۴۴۶٢
$I.\,I.\,R.^{g}$	٠	٠	٠.١٧٩۶	٠.٢۶٢٧	٠.٣۵٩٧	٠.٣٨١٨	٠.۴٠٩٠	٠.۴١۶۴	٠.۴٣۴٨	٠.۴۴۵۵	٠.۴۵٣۶	٠.۴٧٧۶

اگر هر دو نرخ ناسازگاری ($I.\,R.^{m}$ و $I.\,R.^{g}$) برای هر ماتریس مقایسه زوجی بزرگتر از ٠.١ باشد، باید از خبرگان بخواهیم در ترجیحاتشان تجدید نظر کنند. اگر فقط یکی از این مقادیر بزرگتر از ٠.١ باشد، درحالی‌که دیگری در طیف مورد قبول باشد، بهتر است خبرگان برای ارزیابی مجدد مقادیر میانی (مقادیر حدود) ترغیب شوند و مقادیر حدود(مقادیر میانی) بدون تغییر بمانند. در این پایان‌نامه با عدم سازگاری هر یک از این دو ماتریس‌ها، در کل ترجیحات ماتریس مربوطه تجدید نظر خواهد شد.