۶ مدلهای حمل و نقل و تخصیص

۶ـ۱ـ برنامه‌ریزی حمل و نقل

مسائل برنامه‌ریزی خطی می‌تواند به کمک سیمپلکس حل شود، وقتی که مسئله حمل و نقل به فرم یک مسئله برنامه‌ریزی خطی نوشته می‌شود ، قابل حل با روش سیمپلکس خواهد بود. ولی باتوجه به اینکه مسئله حمل و نقل دارای ساختار خاصی می‌باشد آن را می‌توان به کمک تکنیک‌های کاراتری مثل برنامه‌ریزی حمل و نقل حل نمود.

۶ـ۱ـ۱ـ دلایل استفاده از مسئله حمل و نقل

۱ـ بسیاری از مسائل واقعی که در طبیعت وجود دارد بدین روش فرموله می‌شود.

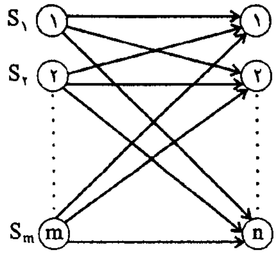
۲ـ بدلیل ساختار خاص مسائل حمل و نقل با الگوریتم‌های کاراتر از روش سیمپلکس قابل حل می‌باشد.

۳ـ این الگوریتم‌ها در صورتی که اطلاعات اولیه عدد صحیح باشد جواب صحیح را حاصل می‌سازد.

مدل حمل و نقل به شکل شبکه‌ای در نظر گرفته می‌شود که گره‌های آن نمایانگر مقاصد و مبادی می‌باشد.

حال هرگاه در مدل برنامه‌ریزی حمل و نقل گره‌های واسطه وجود نداشته باشد و حمل و نقل از مبدأها به مقاصد بطور مستقیم انجام پذیرد، مدل حمل و نقل ساده حاصل شده است در غیراینصورت

۶-۱-۲- مدل مسئله حمل و نقل



$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, x_{ij}$$

$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = s_i \quad (i = 1, 2, \dots, m$ محدودیتهای عرضه از مبدأ)

$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = d_j \quad (j = 1, 2, \dots, n$ محدودیتهای تقاضا در مقصد)

$x_{ij} \geq 0$

Z: تابع هدف مدل که عبارت است از تعیین مقدار کالایی که باید از مبدأ i به مقصد j حمل شود تا کل هزینه حمل و نقل حداقل گردد.

x_{ij}: مقدار کالایی که از مبدأ i به مقصد j حمل می‌شود.

C_{ij}: هزینه حمل هر واحد کالا از مبدأ i به مقصد j

s_i: مقدار عرضه مبدأ iام

d_j: مقدار تقاضای مقصد jام

m: تعداد مبدأها (عرضه)

n: تعداد مقصدها (تقاضا)

مقصد / مبدا	۱	۲	....	n	عرضه Si
۱	C_{11} x_{11}	C_{12} x_{12}		C_{1n} x_{1n}	S_1
۲	C_{21} x_{21}	C_{22} x_{22}		C_{2n} x_{2n}	S_2
⋮					⋮
m	C_{m1} x_{m1}	C_{m2} x_{m2}		C_{mn} x_{mn}	S_m
تقاضا dj	d_1	d_2	....	d_n	

۶-۱-۳- فرضیات مدل حمل و نقل

۱- هزینه حمل هر واحد کالا معین است.

۲- تقاضای مقاصد از طریق عرضه مستقیم کالا از مبدأها تامین می‌شود.

۳- امکان ارسال کالا بین دو مبدأ یا بین دو مقصد وجود ندارد.

مبدأهایی و از چه مسیری انجام شود.

☜ **نکته:** هرگاه در مسئله حمل و نقل، بهره‌وری حمل کالا مورد بررسی قرار گیرد، تابع هدف از نوع حداکثر کردن (Max) می‌شود ولی غالباً مسائل در حالت حداقل نمودن (Min) مطرح خواهد شد.

۶ـ۱ـ۴ـ خواص مدل حمل و نقل

۱ـ تمام ضرایب فنی در تمام محدودیتها برای متغیرهای تعریف شده (مسیرهایی که در شبکه موجودند) برابر ۱ می‌باشد و برای سایر متغیرها برابر صفر است.

۲ـ در هر ستون از ماتریس ضرایب دقیقاً دو عدد ۱ و مابقی صفر می‌باشند یعنی هر متغیر تصمیم‌گیری فقط در ۲ محدودیت تکرار شده است. (یکبار در محدودیتهای عرضه و یکبار در محدودیتهای تقاضا)

۳ـ معمولاً مقادیر عرضه و تقاضا (سمت راست) عدد صحیح می‌باشند.

☜ **نکته:** هر مسئله حمل و نقل همواره دارای جواب موجه و عدد صحیح خواهد بود و هیچگاه حالات بدون جواب بودن یا نامحدود بودن رخ نمی‌دهد.

دلایل اینکه جواب مسئله حمل و نقل همواره عدد صحیح است:

۱ـ عدد صحیح بودن مقادیر سمت راست.

۲ـ در روش حمل و نقل از عملیات جمع و تفریق استفاده شده و اصلاً حالت ضرب و تقسیم وجود ندارد. زیرا تمامی ضرایب تکنولوژی صفر یا یک می‌باشند.

۳ـ مقدار عنصر پاشنه گردی در مقایسه با روش سیمپلکس همواره عدد ۱ می‌باشد. بعبارت بهتر دترمینان ماتریس ضرایب همواره صفر یا ± 1 می‌باشد.

۶ـ۱ـ۵ـ نکات اساسی مدل حمل و نقل

۱ـ در هر مسئله حمل و نقل (که در آن m تعداد محدودیتهای عرضه و n تعداد محدودیتهای تقاضا باشد) در مجموع دارای $m+n$ محدودیت می‌باشد.

۲ـ تعداد متغیرهای تصمیم مدل حمل و نقل برابر $m.n$ متغیر می‌باشد.

۳ـ تعداد ضرایب تکنولوژی مساوی با عدد یک $2mn$ می‌باشد.

۴ـ تعداد ضرایب تکنولوژی مساوی با عدد صفر، $mn\,(m+n) - 2mn$ می‌باشد.

۵ـ اگر جمع کل عرضه و تقاضا برابر باشد $(\sum^{m} s_i = \sum^{n} d_j)$، آنگاه مسئله متوازن می‌باشد.

۶ـ اگر کل عرضه از کل تقاضا کمتر باشد $(\sum^{m} s_i < \sum^{n} d_j)$ مسئله نامتوازن است که در این حالت با

معرفی عرضهٔ مجازی جدید، به اندازه $(\sum^{n} d_j - \sum^{m} s_i)$ به سطر جدول اضافه می‌کنیم. در اینصورت هزینه‌های حمل و نقل آن سطر $(C_{ij} = ۰)$ مساوی صفر خواهد شد.

۷ـ اگر کل عرضه از کل تقاضا بیشتر باشد $(\sum^{m} s_i > \sum^{n} d_j)$ مسئله نامتوازن بوده که در اینصورت با معرفی یک تقاضای مجازی جدید به اندازه $(\sum^{m} s_i - \sum^{n} d_j)$ به ستون جدول اضافه می‌شود که در این حالت هزینه حمل و نقل تقاضای مجازی $(C_{ij} = ۰)$ خواهد بود.

۸ـ در حالت حمل و نقل نامتوازن تعداد کل محدودیت‌ها $(m+n+۱)$ و تعداد متغیرها $m \times (n + ۱)$ یا $n \times (m + ۱)$ خواهد بود.

۹ـ هرگاه مسئله حمل و نقل متوازنی دارای m مبدأ عرضه و n مقصد تقاضا حل شود، حداکثر دارای $(m + n - ۱)$ متغیر پایه می‌باشد. بعبارت بهتر مرتبه ماتریس ضرایب برابر $(m + n - ۱)$ خواهد بود و تعداد بردارهای مستقل نیز حداکثر $m + n - ۱$ خواهد بود. اگر مسئله نامتوازن باشد $(m + n - ۱)$ به $m+n$ تبدیل می‌شود.

۱۰ـ هرگاه مسئله حمل و نقل به روش سیمپلکس حل شود، تعداد پایه‌ها برابر تعداد محدودیتهای مسئله $(m+n)$ می‌باشد که یکی از آنها برابر صفر خواهد بود. بنابراین هرگاه مسئله حمل و نقل به روش سیمپلکس حل شود حتماً جواب منحط خواهد داشت.

۶ـ۱ـ۶ـ شروط لازم و کافی در مسئله حمل و نقل

الف) برای وجود جواب: هر مسئله حمل و نقل در صورتی که متوازن یا نامتوازن باشد جواب دارد و نیازی به هیچگونه شرطی نخواهد داشت.

ب) برای جواب عدد صحیح: باید مقادیر عرضه و تقاضا عدد صحیح باشد. در صورتی‌که مسئله به‌گونه‌ای مطرح شود که ضرایب تکنولوژی صفر یا یک نباشد، باید با روابط ریاضی ضرایب را صفر و یک نمود.

ج) برای وجود جواب بهینه: به ازای جواب قابل قبول مسئله اولیه، حل مزدوج متناظری وجود داشته باشد که جواب آن نیز قابل قبول بوده و دارای مقادیر تابع هدف یکسانی باشند.

۶ـ۲ـ الگوریتم حل مدل حمل و نقل

قدم اول) تعیین جواب اساسی موجه اولیه با یکی از روشهای مقابل

۱ـ روش گوشه شمال غربی (سمت چپ بالا)
۲ـ روش کمترین هزینه سطری یا ستونی
۳ـ روش کمترین هزینه ماتریسی
۴ـ روش تقریبی وگل

☜ **نکته:** براساس تجربه غالباً جوابهای حاصل از روشهای فوق به ترتیب از پائین به بالا به جواب بهینه نزدیکتر می‌باشند.

قدم دوم) تعیین جواب بهینه از جواب اساسی بهینه اولیه با یکی از روشهای مقابل

۱ـ روش مستقیم (اولیه یا پله سنگ)
۲ـ روش مضارب (مزدوج، توزیع تعدیل شده، *MODI*)

☜ **نکته:** اگر چنانچه به جواب بهینه نرسیدیم ، با انتخاب متغیر ورودی و خروجی و تعیین جواب اساسی موجه جدید قدم دوم را تا رسیدن به حل نهایی ادامه می‌دهیم.

۶ـ۳ـ روش گوشه شمال غربی

۱ـ بجای گوشه شمال غربی از هرکدام از گوشه‌های دیگر می‌توان استفاده نمود.

۲ـ تعداد متغیرهای اساسی حاصله از این روش حداکثر $(m + n - 1)$ می‌شود و در صورتی که کمتر از این تعداد باشد، مسئله دارای حالت منحط است.

۳ـ در محاسبهٔ تعداد مبدأها و مقصدها توجه کنید که سطر یا ستون مجازی محاسبه شود.

۴ـ هرگاه مقادیر عرضه و تقاضا غیر از مرحله آخر سطر بطور همزمان صفر شود (بصورت قطری حرکت نموده) در نهایت حل مسئله منحط خواهد بود.

۵ـ بدلیل استقلال متغیرهای پایه از یکدیگر به کمک خطوط عمودی و افقی نمی‌توان حلقه بسته تشکیل داد زیرا در اینصورت باید متغیرهای پایه وابسته باشند.

۶ـ این روش تنها روشی است که به هزینه‌های حمل و نقل ارتباطی ندارد و بدون توجه به هزینه‌های حمل و نقل قابل حل است. به همین دلیل این روش یک جواب پایه موجه جواب ارائه نمی‌دهد.

۶ـ۴ـ روش کمترین هزینهٔ ماتریسی

۱ـ در شرایط تساوی، حداقل هزینهٔ یکی از سلولها به اختیار انتخاب می‌شود ولی بهتر است آن سلولی انتخاب شود که می‌تواند تخصیص بیشتری به خود اختصاص دهد.

۲ـ برای محاسبه حداقل هزینه توجه کنید که حتی‌الامکان از سطر یا ستون مجازی تا زمانی‌که

مجبور نشده‌اید استفاده نکنید.

۳ـ اگر سطر و ستون مقادیر عرضه و تقاضا غیر از مرحله آخر یکباره صفر شود، جواب حاصل منحط بوده و تعداد متغیرهای پایه کمتر از $(m + n - 1)$ خواهد بود.

۶ـ۵ـ روش تقریبی وگل

۱ـ در شرایط تساوی، هزینهٔ یکی به دلخواه انتخاب می‌شود ولی بهتر است آن سلولی انتخاب شود که می‌تواند تخصیص بیشتری به خود اختصاص دهد.

۲ـ برای محاسبهٔ اختلاف دو حداقل هزینه سطری یا ستونی حتی‌الامکان از سطر یا ستون مجازی استفاده نکنید.

۳ـ زمانی‌که فقط یک سطر یا فقط یک ستون باقی مانده است الگو را خاتمه داده و تخصیص‌های باقی‌مانده را بطور همزمان انجام دهید.

در بهبود جوابها به روش‌های پله سنگ و مضارب قابل ذکر است که روش اول با استفاده از مفهوم مسئله اولیه، نسبت به تعیین جواب بهینه اقدام می‌کند، در حالی‌که در روش مضارب حل بهینه با استفاده از مفهوم مسئله ثانویه انجام می‌شود.

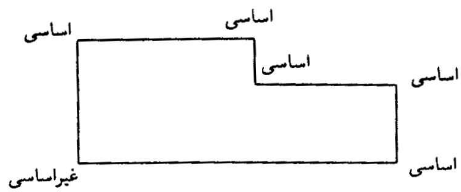
۶ـ۶ـ روش پله سنگ

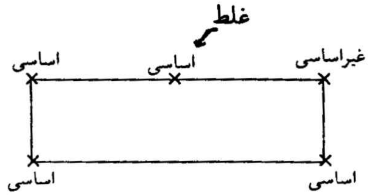
این روش روندی را دنبال می‌نماید تا با یک سری عملیات متوالی از یک جواب موجه ابتدایی به جواب بهینه برسد. گام‌های زیر جهت بهبود جواب بکارگرفته می‌شود.

گام ۱ ـ یک خانهٔ خالی (یک متغیر غیراساسی) را جهت ارزیابی انتخاب کنید.

گام ۲ ـ برای خانه خالی انتخاب شده یک مسیر پله سنگ رسم کنید. یکی از گوشه‌های این مسیر در خانه خالی انتخابی (خانه‌ای که متغیر غیراساسی دارد) قرارگرفته و سایر گوشه‌ها باید در خانه‌های پر (خانه هایی که متغیرهای آن اساسی است) واقع شده و سپس به گوشه موردنظر که در خانه خالی قرار گرفته علامت (+) اختصاص داده و به سایر گوشه‌ها، یکی در میان علامت منفی (−) و سپس (+) تخصیص دهید.

تذکر: مسیر پله سنگ، مسیری است بسته و منحصر به فرد که دارای اضلاعی عمود بر هم می‌باشد. در روش پله سنگ هر حرکت فقط به یک متغیر اساسی منتهی می‌شود و نقطه شروع و پایان آن، متغیر غیراساسی مورد بررسی می‌باشد.





گام ۳ ـ هزینه حمل هر واحد کالا برای خانه‌هایی که دارای علامت مثبت هستند را با هم جمع و از مجموع هزینه حمل هر واحد کالا برای خانه‌هایی که دارای علامت (−) هستند، کم کنید عدد حاصل ارزش خانهٔ خالی انتخابی را نشان می‌دهد ($\overline{C}_{ij} = C_{ij} - Z_{ij}$)

گام ۴ ـ ارزش تمامی خانه‌های خالی را مطابق گام‌های فوق بدست آورده، اگر ارزش تمامی خانه‌های خالی عددی غیرمنفی بود به جواب بهینه رسیده‌اید، در غیر اینصورت این جدول بهینه نبوده و گام‌های بعدی را اجرا کنید.

گام ۵ ـ انتخاب متغیر ورودی: آن خانه خالی را که دارای منفی‌ترین ارزش محاسبه شده ($\overline{C}_{ij} = C_{ij} - Z_{ij}$) باشد را انتخاب کنید و متغیر مربوط به این خانه را متغیر ورودی بنامید.

گام ۶ ـ انتخاب متغیر خروجی: از میان تمام خانه‌هایی که رأس مسیر پله سنگ در آن قرار گرفته و دارای علامت منفی هستند، خانه‌ای را که دارای کمترین مقدار متغیر اساسی (x_{ij}) است را انتخاب کنید. متغیر مربوط به این خانه را متغیر خروجی بنامید.

گام ۷ ـ بدست آوردن جدول جدید: یک جدول جدید رسم کرده و مقدار خانه انتخابی در گام ۶ (مقدار x_{ij} متغیر خروجی) را به مقدار x_{ij} خانه‌هایی که دارای علامت (+) هستند، اضافه کرده و از مقدار (x_{ij}) خانه‌هایی که دارای علامت منفی (−) هستند کم کنید و مقدار سایر خانه‌هایی که راس‌های مسیر پله‌سنگ در آنها قرار نگرفته به همان صورت به جدول جدید منتقل کرده و به گام اول برگردید.

☜ **نکته:** مقدار هزینه کاهش یافته تابع هدف از رابطه زیر حاصل می‌شود.

هزینه کاهش یافته = (مقدار متغیر خروجی) (| متغیر ورودی $C_{ij} - Z_{ij}$ |)

۶ـ۷ـ روش مضارب (توزیع تعدیل شده)

همانگونه که مطرح شد در روش مضارب حل بهینه با استفاده از مفهوم مسئله ثانویه انجام می‌شود. متغیرهای ثانویه مربوط به محدودیت عرضه با u_i و متغیرهای ثانویه مربوط به محدودیتهای تقاضا با v_j تعریف می‌شود.

۶-۷-۱- ثانویه (دوگان) مسئله حمل و نقل

اگر یک مسئله حمل و نقل بصورت زیر باشد:

$$Min\ Z = \sum_{i}^{m} \sum_{j}^{n} C_{ij}\, x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = S_i \qquad (i = 1, \ldots, m \quad \text{(محدودیتهای عرضه از مبدأ)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = d_j \qquad (j = 1, \ldots, n \quad \text{(محدودیتهای تقاضا در مقصد)}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

آنگاه ثانویه (دوگان) آن بصورت زیر نگاشته می‌شود.

$$Max\ Y = \sum_{i=1}^{m} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n} d_j v_j$$

$$u_i + v_j \leq C_{ij}$$

u_i ، v_j آزاد در علامت

مطابق قضایای دوگان، متغیر x_{ij} وقتی اساسی می‌شود که محدودیت ثانویه متناظر با آن فعال بوده و بصورت تساوی برقرار باشد. یعنی برای متغیرهای اساسی (خانه‌های جدول با مقادیر مثبت) رابطه $u_i + v_j = C_{ij}$ برقرار است. حال با استفاده از رابطه فوق کلیه مقادیر u_i (به تعداد سطرهای جدول حمل و نقل) و v_j (به تعداد ستونهای جدول حمل و نقل) را بدست می‌آوریم که تعداد این مجهولها $(m+n)$ بوده و تعداد معادلات $u_i + v_j = C_{ij}$ (به تعداد متغیرهای اساسی یعنی $(m + n - 1)$ خواهد بود. لذا به یکی از مجهولات (معمولاً u_1) مقدار دلخواه صفر را تخصیص داده و سایر مجهولات u_i و v_j را با استفاده از رابطه $u_i + v_j = C_{ij}$ جهت متغیرهای اساسی بدست می‌آوریم و برای خانه‌های تخصیص نیافته (متغیرهای غیراساسی) مقادیر $C_{ij} - (u_i + v_j)$ محاسبه نموده وگام‌های زیر را انجام می‌دهیم.

۶-۷-۲- گام‌های حل روش مضارب

در این روش نیز از یک جواب موجه ابتدایی گامهای زیر جهت بهبود جواب برداشته می‌شود.

گام ۱ - از رابطه $C_{ij} = u_i + v_j$ استفاده کرده و براساس خانه‌های پر برای هر سطر، یک u_i و برای هر ستون، یک v_j محاسبه کنید.

گام ۲ ـ با استفاده از اطلاعات گام اول، ارزش خانه‌های خالی را با استفاده از رابطه $C_{ij} - Z_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j)$ محاسبه نمائید اگر کلیه این مقادیر غیرمنفی بود به جواب بهینه رسیده‌اید در غیر اینصورت به گام بعد بروید.

گام ۳ ـ خانه خالی را که دارای منفی‌ترین مقدار $C_{ij} - Z_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j)$ می‌باشد مشخص نموده و متغیر مربوط به آن را متغیر ورودی بنامید.

گام ۴ ـ برای خانه خالی انتخاب شده در گام چهارم، یک مسیر پله سنگ رسم نموده و از میان خانه‌هایی که دارای علامت منفی می‌باشند، خانه‌ای را که دارای کمترین مقدار x_{ij} است انتخاب و متغیر مربوط به آن را متغیر خروجی بنامید.

گام ۵ ـ مقدار خانه انتخاب شده در گام ۴ (x_{ij}) را به مقدار خانه هایی که دارای علامت مثبت هستند اضافه و از مقدار خانه‌هایی که دارای علامت منفی هستند، کم کنید تا جدول جدید بدست آید، سپس به گام اول برگردید.

۶ـ۸ـ حالات خاص در روش حمل و نقل

۱ـ مسئله حمل و نقل هیچ وقت دارای حالت خاص بدون جواب بهینه یا منطقه موجه نامحدود نیست و همواره جوابی موجه و عدد صحیح خواهد داشت.

۲ـ در مرحله یافتن جواب موجه ابتدایی : هرگاه در تخصیص مقادیر به یک خانه خالی، همزمان میزان عرضه سطر و تقاضای ستون با هم به صفر برسد. در این شرایط یا سطر یا ستون حذف می‌شود و به یکی از خانه‌های خالی سطر یا ستون دیگر مقدار صفر تعلق می‌گیرد. در این حالت مقدار صفر به یک متغیر اساسی تعلق گرفته و حالت خاص جواب تبهگن است.

۳ـ در مرحله بهبود جواب: هرگاه هنگام تعیین متغیر خروجی، درگوشه‌های منفی دو مقدار حداقل، یکسان داشته باشیم در جدول بعد یکی از متغیرها از پایه خارج می‌شود و متغیر دیگر با مقدار صفر در پایه باقی می‌ماند که در این حالت جواب اساسی تبهگن خواهیم داشت.

۴ـ در جدول حمل و نقل اگر کمتر از $m + n - 1$ متغیر اساسی داشته باشیم، در این حالت به تعداد کمبود، متغیر اساسی تبهگن وجود خواهد داشت.

۵ـ هرگاه مقدار یک یا چند خانه خالی (متغیر غیراساسی)، با رابطهٔ $Z_{ij} - C_{ij} = u_i + v_j - C_{ij}$ معادل صفر گردد مسئله دارای حالت خاص جواب بهینه چندگانه خواهد شد.

۶ـ۹ـ تحلیل حساسیت مسئله حمل و نقل

تحلیل حساسیت مدل حمل و نقل
- ۱ـ تحلیل حساسیت ضرایب تابع هدف
  - الف ـ ضرایب متغیرهای غیراساسی
  - ب ـ ضرایب متغیرهای اساسی
- ۲ـ تحلیل حساسیت عرضه و تقاضا (اعداد سمت راست)

۶ـ۹ـ۱ـ تحلیل حساسیت ضرایب تابع هدف برای متغیرهای غیراساسی

در مسائل Min وقتی، جواب بهینه است که رابطه $C_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0$ برای تمامی متغیرهای غیراساسی برقرار باشد. حال ضرایب C_{ij} جهت متغیرهای غیراساسی باید به گونه‌ای تغییر نماید که جواب فعلی بهینه باقی بماند بنابراین برای متغیرهای غیراساسی x_{ij} باید رابطه زیر برقرار باشد.

$$C_{ij} + \Delta_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0$$

که در آن Δ_{ij} میزان تغییرات ضریب تابع هدف متغیر غیراساسی x_{ij} خواهد بود.

۶ـ۹ـ۲ـ تحلیل حساسیت ضرایب تابع هدف برای متغیرهای اساسی

در جدول بهینه اگر x_{ij} متغیر اساسی باشد رابطه $C_{ij} = u_i + v_j$ همواره برقرار است. حال جهت تعیین دامنه تغییرات مجاز C_{ij}، بجای عبارت C_{ij} عبارت $C_{ij} + \Delta_{ij}$ را در جدول بهینه قرار داده و مجدداً u_i و v_j های جدید را محاسبه نموده و سپس مقادیر $C_{ij} - (u_i + v_j)$ را برای کلیه مقادیر غیراساسی مربوطه محاسبه نموده و جهت حفظ شرط بهینگی، بزرگتر مساوی صفر قرار می‌دهیم $(C_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0)$ و حدود تغییرات C_{ij} موردنظر (Δ_{ij}) را بدست می آوریم.

۶ـ۹ـ۳ـ تحلیل حساسیت عرضه و تقاضا (اعداد سمت راست)

تابع هدف مسئله ثانویه در مدل حمل و نقل بصورت زیر بیان می‌گردد:

$$Max\ Y = \sum_{i}^{m} S_i u_i + \sum_{j}^{n} d_j v_j$$

که در آن u_i و v_j ها متغیر ثانویه و بیانگر قیمت‌های سایه در جدول بهینه می‌باشند و هرگونه تغییر در میزان عرضه مبادی یا تقاضای مقاصد موجب تغییر در مقدار بعضی از متغیرهای اساسی خواهد شد.
باتوجه به این مطالب تحلیل حساسیت عرضه و تقاضا بدین صورت طبقه‌بندی می‌شود:
حالت ۱) تغییرات تابع هدف در اثر افزایش یک واحد در عرضه مبدأ i و کاهش همزمان یک واحد در

تقاضای مقصد j عبارتست از:

$$\Delta Z = u_i - v_j$$

حالت ۲) تغییرات تابع هدف در اثر افزایش یک واحد در عرضه مبدأ i و افزایش همزمان یک واحد در تقاضای مقصد j عبارتست از:

$$\Delta Z = u_i + v_j$$

حالت ۳) تغییرات تابع هدف در اثر افزایش یک واحد در تقاضای مقصد j و کاهش همزمان یک واحد در تقاضای مقصد k عبارتست از:

$$\Delta Z = v_j - v_k$$

حالت ۴) تغییرات تابع هدف در اثر کاهش یک واحد در عرضه مبدأ i و کاهش همزمان یک واحد در تقاضای مقصد j عبارتست از:

$$\Delta Z = -u_i - v_j$$

حالت ۵) تغییرات تابع هدف در اثر افزایش یک واحد در عرضه مبدأ k عبارتست از:

$$\Delta Z = u_k - Max\, u_i$$

که در آن از عرضه مبدأ متناظر با $Max\ u_i$ یک واحد کاسته می‌شود.

حالت ۶) تغییرات تابع هدف در اثر افزایش یک واحد در تقاضای مقصد l عبارتست از:

$$\Delta Z = v_l - Max\, v_j$$

که در آن از تقاضای مقصد متناظر با $Max\ v_j$ یک واحد کاسته می‌شود.

حالت ۷) تغییرات تابع هدف در اثر کاهش یک واحد در عرضه مبدأ k عبارتست از:

$$\Delta Z = -u_k - Max\, u_i$$

که در آن به عرضه مبدأ متناظر با $Max\ u_i$ یک واحد اضافه می‌شود.

حالت ۸) تغییرات تابع هدف در اثر کاهش یک واحد در تقاضای مقصد l عبارتست از:

$$\Delta Z = -v_l - Max\, v_j$$

که در آن به تقاضای مقصد متناظر با $Max\ v_j$ یک واحد اضافه می‌شود.

۶ـ۱۰ـ مسئله تخصیص (واگذاری)

مدل تخصیص *(Assignment)* مدلی خاص از مسئله حمل و نقل می‌باشد که برای تخصیص یک کار یا فعالیت یا شغل یا وظیفه به یک ماشین، کارگر، یا شخص استفاده می‌شود به گونه‌ای که هزینه تخصیص حداقل گشته و یا بهره‌وری و سود ناشی از تخصیص حداکثر گردد.

☜ **نکته:** در مدل تخصیص تعداد عرضه m و تقاضا n با هم برابر بوده $(m=n)$ و همچنین مقدار مقادیر عرضه و تقاضا مساوی یک می‌باشد.

$s_i = d_j = ۱$

ماتریس هزینه یک مسئله تخصیص به صورت زیر ترسیم می‌شود.

شغل / فرد	۱	۲	....	j	...	n
۱	$C_{۱۱}$	$C_{۱۲}$	....	$C_{۱j}$	...	$C_{۱n}$
۲	$C_{۲۱}$	$C_{۲۲}$	....	$C_{۲j}$	...	$C_{۲n}$
⋮	⋮					
i	$C_{i۱}$	$C_{i۲}$	....	C_{ij}	...	C_{in}
⋮	⋮					
n	$C_{n۱}$	$C_{n۲}$	....	C_{nj}	...	C_{nn}

۶ـ۱۱ـ روش‌های حل مدل تخصیص

۶ـ۱۱ـ۱ـ روش شمارش کامل

می‌خواهیم n شغل را به n فرد تخصیص دهیم به گونه‌ای که حداکثر بهره‌وری حاصل شود. در این روش کلیه حالات ممکن تخصیص شغل‌ها به افراد در نظر گرفته شده و برای هرکدام مقدار تابع هدف را محاسبه می‌کنیم. بهترین حالت وقتی است که تابع هدف کمترین مقدار را داشته باشد. این روش کاربرد چندانی ندارد.

☜ **نکته:** تعداد کل حالات تخصیص n شغل به n فرد $n!$ می‌باشد.

۶ـ۱۱ـ۲ـ روش برنامه‌ریزی عدد صحیح

در برنامه‌ریزی عدد صحیح مسئله تخصیص پارامترها به شکل زیر تعریف می‌شود.

x_{ij}: متغیرهای تصمیم برای تخصیص n فرد به n شغل

C_{ij}: هزینه تخصیص فرد iام به شغل jام

حال مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مسئله تخصیص به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$Min\ Z = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} C_{ij} x_{ij}$$

$$S.t: \sum_{j=۱}^{n} x_{ij} = ۱ \qquad i = ۱, ۲, \dots, n$$

$$\sum_{i=۱}^{n} x_{ij} = ۱ \qquad j = ۱, ۲, \dots, n$$

$$x_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر فرد } i \text{ام کار } j \text{ام را انجام دهد} \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

محدودیت اول نشان می‌دهد که باید به همه افراد شغل تخصیص داده شود و محدودیت دوم نشان می‌دهد که باید به هر شغلی یک فرد تخصیص داده شود.

۶ـ۱۱ـ۳ـ روش برنامه‌ریزی خطی

با جایگزینی $x_{ij} \geq ۰$ به جای $x_{ij} = \begin{cases} ۱ \\ ۰ \end{cases}$ در مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح فوق، مسئله به یک مدل برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌شود.

۶ـ۱۱ـ۴ـ روش حمل و نقل

مدل تخصیص در واقع نوع خاصی از مدل حمل و نقل می‌باشد که در آن مشاغل (عرضه) به افراد (تقاضا) تخصیص داده می‌شود و به این ترتیب ($n.n = n^۲$) متغیر تصمیم (x_{ij}) وجود خواهد داشت که‌ازاین‌متغیرهاتعداد($n + n - ۱ = ۲n - ۱$)متغیراساسی،خواهدبود.ولی‌چون‌هرمتغیراساسی‌بامقدار یک، همزمان نیازمندی یک سطر و ستون را برآورده می‌کند، پس در هر سطر یا ستون یک متغیر اساسی با مقدار صفر داریم. به عبارت دیگر از $۲n - ۱$ متغیر اساسی n متغیر اساسی با مقدار یک و $n-۱$ متغیر اساسی با مقدار صفر (جوابهای تبهگن) وجود دارد.

۶ـ۱۱ـ۵ـ روش مجارستانی (بسط ماتریسی)

روش مجارستانی بهترین روش برای حل مدل تخصیص بوده و مبتنی بر خاصیت ماتریسها در روابط بین مسئله اولیه و ثانویه می‌باشد. این روش بر مبنای قضیه زیر بنیان نهاده شده است.

«اگر تمامی اعداد هر سطر یا ستون یک مسئله تخصیص، به یک میزان افزایش یا کاهش یابند، جواب بهینه مسئله تخصیص جدید، معادل همان مسئله اول خواهد بود.»

گام اول ـ در هر سطر ماتریس هزینه، کوچکترین عدد را انتخاب و از بقیه اعداد موجود در آن سطر کم کرده و ماتریس هزینه جدید تشکیل دهید. سپس در هر ستون ماتریس حاصله نیز، کوچکترین عدد موجود در ستون را از بقیه اعداد همان ستون کم کنید. ماتریس حاصل «ماتریس هزینه‌های کاهش یافته یا جدول هزینه فرصت» نامگذاری می‌شود.

گام دوم ـ با استفاده از حداقل تعداد خطوط، تمامی صفرهای موجود در سطر یا ستون ماتریس هزینه‌های کاهش یافته را بپوشانید. (این خطوط، خطوط پوششی نامیده می‌شود و باید حتماً افقی یا عمودی باشند) اگر تعداد خطوط پوشش برابر افراد یا مشاغل (n) باشد به جدول بهینه رسیده‌اید در غیر اینصورت به گام سوم بروید.

نکته: خطوط پوششی به گونه‌ای ترسیم می‌گردد که هر خط تا آنجا که ممکن است تعداد بیشتری از صفرها را بپوشاند.

گام سوم - کوچکترین عددی را که در ماتریس اخیر روی آن خط کشیده نشده است انتخاب کرده و این عدد را از تمامی اعدادی که روی آنها خطی کشیده نشده است کم کرده و به اعدادی که در محل تقاطع خطوط پوشش قرار دارند اضافه کرده و به گام دوم برگردید.

گام چهارم - پس از رسیدن به جدول بهینه جهت تعیین جواب بهینه، بایستی هرکار به یک فرد واگذار شود. جهت این کار سطر یا ستونی را که فقط یک صفر دارد پیدا کرده و دور آن خط بکشید و بر این مبنا کار و فردی که باید آن را انجام دهد، مشخص می‌شود. حال از سطر و ستونی که صفر آن تعیین شده صرفنظر کرده و در مابقی جدول به دنبال سطر یا ستونی بگردید که یک صفر را داشته باشد و عملیات بدین ترتیب ادامه می‌یابد تا جواب بهینه حاصل شود.

نکته: جواب وقتی بهینه است که در هر سطر یا ستون فقط به دور یک صفر خط کشیده شده باشد.

نکته: پس از بدست آوردن جواب بهینه برای یک مسئله تخصیص ممکن است مقدار و موقعیت صفرها در جدول نهایی به گونه‌ای باشد که بتوان بیش از یک جواب بهینه یافت. هرگاه در جدول نهایی تعداد صفرها برای هر سطر یا ستونی بیش از یک باشد امکان وجود جواب بهینهٔ چندگانه وجود دارد. در جواب بهینه چندگانه مقادیر Z به ازای تمام جوابهای بهینه یکسان می‌باشد.

نکته: در مسئله تخصیص اگر بخواهیم کاری به فردی تخصیص نیابد هزینه آن را بسیار زیاد (M) در نظر می‌گیریم.

نکته: اگر چنانچه در مسائل تخصیص تعداد سطرها و ستونها مساوی نباشد (عدم توازن) در آن صورت از سطر یا ستون مجازی با هزینه‌های صفر استفاده می‌کنیم تا توازن حاصل شود.