دانشگاه آزاد اسلامی

دانشکده مدیریت

عنوان درس:

تحقیق در عملیات

مدرس:

دکتر اردشیر بذرکار

تاریخچه تحقیق در عملیات [OR]

موضوع تحقیق در عملیات [OR] در طول جنگ جهانی دوم توسط دانشمندان انگلیسی توسعه و گسترش یافت. دلیل انجام چنین مطالعاتی محدودیت منابع و بودجه نظامی بود. پس از جنگ ، موفقیت گروههای نظامی توجه مدیران صنعتی را به خود جلب کرد. زیرا ورود تخصص شغلی در تشکیلات تجاری روز به روز حادتر می شد و این وضع منجر به مسائل تصمیم گیری پیچیده ای شده بود که نهایتا سازمانها را مجبور نمود تا درصدد استفاده از موثرترین روشهای OR برآیند.

امروزه پیشرفت چشمگیر مبانی ریاضی فنون تحقیق در عملیات و توسعه تکنولوژی رایانه، دامنه کاربرد تحقیق در عملیات را به جایی کشانده که امروزه سازمانها درصدد تهیه سیستمهای هوشمند با استفاده از منطق فازی هستند.

ویژگی های تحقیق در عملیات

تمرکز اصلی و اولیه OR بر تصمیم گیری مدیران است

رویکرد OR یک رویکرد علمی است

در OR مسائل و تصمیمات با نگاه سیستمی بررسی می شوند

رشته OR یک رشته از ترکیب چندین رشته مستقل است [دانش بین رشته ای است]

در OR از مدلهای ریاضی استفاده می شود

در OR از رایانه به وفور استفاده می شود

مدلها در تحقیق در عملیات

مدلها معمولا ساده شده واقعیت است. در OR سه مدل وجود دارد که در زیر به شرح آنها خواهیم پرداخت:

مدل شمایلی : جایگزین فیزیکی از سیستم است که معمولا در اندازه های متفاوت نشان داده می شود مانند ماکت سه بعدی و تصاویر دو بعدی

مدل قیاسی : این مدل در قالب نمودار دو بعدی بیان می شود مانند نمودار سازمانی

مدل ریاضی: مسائل پیچیده را تنها با این مدل می توان تحلیل کرد. دلایل استفاده از این مدل بدین شرح است :

- موقعیت های پیچیده را می توان تعریف کرد
- می توان زمان عملیات واقعی را شبیه سازی کرد
- آزمایش سیستم را ساده تر و امکان پذیر می سازد
- هزینه رفع عیب بسیار پایین است
- ریسک در تصمیم را محاسبه می کند
- زمینه آموزش و یادگیری را فراهم می کند

مدلهای ریاضی به سه دسته تقسیم می شوند :

قطعی : در شرایط اطمینان کامل ساخته می شود

احتمالی : در شرایط نامعین و تصادفی رخ می دهد. مهمترین مدلهای احتمالی شامل ۱– مارکوفی ۲– صف

ترکیبی : هم در شرایط قطعی و هم در شرایط احتمال ساخته می شود

فصل دوم

برنامه ریزی خطی (مدلسازی)

جدول زیر را در نظر بگیرید

میزان منابع موجود	محصول۳	محصول۲	محصول۱	
۲۰۰نفر	۵	۲	۶	نیروی انسانی
۱۵۰ کیلوگرم	۳	۵	۴	مواد اولیه
	۳۰	۳۰	۴۰	میزان سوددهی

شرکتی می خواهد بداند که از هر یک از سه محصول چه مقدار تولید کند تا با رعایت محدودیت منابع به حداکثر سود کل نایل شود

در ابتدا جدول را به صورت ریاضی در می آوریم یعنی به جای عبارت محصول از X استفاده می نماییم.

نکته: در این مسئله از واژه محصول استفاده شده است و در مسئله دیگر می تواند واژه دیگری بکار رود.

در هر صورت ما باید واژه ها را به X تبدیل نماییم

محصول ۱ ⟹ X_1

محصول ۲ ⟹ X_2

محصول ۳ ⟹ X_3

دلیل اینکه جدول را به صورت ریاضی در می آوریم این است که بتوانیم پاسخ را توسط مدل ریاضی بدست آوریم و برای این کار نمی توانیم در فرمول از کلمات محصول ۱ و محصول ۲ و... استفاده نماییم پس آنها را تبدیل به X_1 و X_2 و... می نماییم

بعد از نوشتن مدل ریاضی برای حداکثر کردن سود تابع هدف را رسم می کنیم

	محصول۱	محصول۲	محصول۳	میزان منابع موجود
نیروی انسانی	۶	۲	۵	۲۰۰نفر
مواد اولیه	۴	۵	۳	۱۵۰ کیلوگرم
میزان سوددهی	۴۰	۳۰	۳۰	

x_1 x_2 x_3

40 30 30

$40x_1$ $30x_2$ $30x_3$

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 30x_2 + 30x_3$$

تابع هدف

به دلیل حداکثرسازی سود از MAX استفاده می نماییم

حال محدودیت ها را می نویسیم

محاسبه محدودیت نیروی انسانی

	محصول۱	محصول۲	محصول۳	میزان منابع موجود
نیروی انسانی	۶	۲	۵	۲۰۰نفر
مواد اولیه	۴	۵	۳	۱۵۰ کیلوگرم
میزان سوددهی	۴۰	۳۰	۳۰	

x_1 x_2 x_3

6 2 5 200

$6x_1$ $2x_2$ $5x_3$

محدودیت نیروی انسانی

$$6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 200$$

به این دلیل از علامت $\leq$ استفاده نموده ایم که میزان محصول مصرفی ما در محصول ۱و۲و۳ باید کمتر از میزان منابع موجود باشد. یعنی اگر ما ۲۰۰ نفر نیروی کار داشته باشیم نخواهیم توانست از ۲۵۰ نفر در یک مسئله استفاده نماییم و حتما باید میزانی منابع بکار ببریم که یا برابر و یا کمتر از میزان منابع موجود باشد

محاسبه محدودیت مواد اولیه

	محصول۱	محصول۲	محصول۳	میزان منابع موجود
نیروی انسانی	۶	۲	۵	۲۰۰نفر
مواد اولیه	۴	۵	۳	۱۵۰ کیلوگرم
میزان سوددهی	۴۰	۳۰	۳۰	

x_1 x_2 x_3

4 5 3 150

$4x_1$ $5x_2$ $3x_3$

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 150$$

محدودیت مواد اولیه

محدودیت را با s.t نشان می دهند

	محصول۱	محصول۲	محصول۳	میزان منابع موجود
نیروی انسانی	۶	۲	۵	۲۰۰نفر
مواد اولیه	۴	۵	۳	۱۵۰ کیلوگرم
میزان سوددهی	۴۰	۳۰	۳۰	

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\le 200 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\le 150 \end{aligned}\right\}$$ محدودیت کارکردی

$$\left. x_1 , x_2 , x_3 \ge 0 \right\}$$ محدودیت علامت

صورت کلی محدودیت ها

محدودیت کارکردی: به میزان منابع موجود گفته می شود که در فرایند تولید به ما نشان می دهد در هنگام تولید توان استفاده بیشتر از این مقدار را نخواهیم داشت

محدودیت علامت: به ما نشان می دهد که تولید نمی تواند کمتر از صفر باشد یعنی ما هیچگاه تولید منفی نداریم

در نتیجه خواهیم داشت

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 30x_2 + 30x_3$$

s.t

$$6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 200$$

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 150$$

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

فصل سوم

برنامه ریزی خطی روش هندسی

برنامه ریزی خطی

جدول زیر را در نظر بگیرید

	نیروی کار	مواد اولیه	سود
محصول ۱	۱	۴	۴۰
محصول ۲	۲	۳	۵۰
میزان منابع موجود	۴۰	۱۲۰	

	نیروی کار	مواد اولیه	سود
محصول ۱	۱	۴	۴۰
محصول ۲	۲	۳	۵۰
میزان منابع موجود	۴۰	۱۲۰	

محصول ۱ ⟸ X_1

محصول ۲ ⟸ X_2

تابع هدف

	نیروی کار	مواد اولیه	سود
محصول ۱	۱	۴	۴۰
محصول ۲	۲	۳	۵۰
میزان منابع موجود	۴۰	۱۲۰	

Max Z

$40x_1 + 50x_2$

از آنجایی که هدف حداکثر کردن سود است پس در تابع هدف از Max استفاده می نماییم

اگر هدف حداقل کردن هزینه و... باشد از Min استفاده می کنیم

تابع هدف

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2$$

محدودیت یا s.t

	نیروی کار	مواد اولیه	سود
محصول ۱	۱	۴	۴۰
محصول ۲	۲	۳	۵۰
میزان منابع موجود	۴۰	۱۲۰	

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2$$

s.t

$$x_1 + 2x_2 \le 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \le 120$$

$$x_1 , x_2 \ge 0$$

پس در حالت کلی خواهیم داشت

ابتدا $\leq$ را تبدیل به = می کنیم

پس خواهیم داشت

$$x_1 + 2x_2 = 40$$

x_1 را صفر در نظر می گیریم حال باید ۲ را در چه عددی ضرب کنیم تا برابر ۴۰ شود

مطمئنا می گویید ۲۰ ، پس x_2 برابر ۲۰ است

$$(0) + 2(20) = 40$$

x_2 را صفر در نظر می گیریم پس x_1 برابر ۴۰ است

$$(40) + 2(0) = 40$$

در کل خواهیم داشت

$$\begin{cases} x_1 = 40 \\ x_2 = 20 \end{cases}$$

ابتدا $\leq$ را تبدیل به = می کنیم

پس خواهیم داشت

$$4x_1 + 3x_2 = 120$$

x_1 را صفر در نظر می گیریم حال باید ۳ را در چه عددی ضرب کنیم تا برابر ۱۲۰ شود

مطمئنا می گویید ۴۰ ، پس x_2 برابر ۴۰ است

$$4(0) + 3(40) = 120$$

x_2 را صفر در نظر می گیریم حال باید ۴ را در چه عددی ضرب کنیم تا برابر ۱۲۰ شود

مطمئنا می گویید ۳۰ ، پس x_1 برابر ۳۰است

$$4(30) + 3(0) = 120$$

در کل خواهیم داشت

$$\begin{cases} x_1 = 30 \\ x_2 = 40 \end{cases}$$

حالت کلی

$$x_1 + 2x_2 = 40$$

$$(0) + 2(20) = 40 \qquad x_2 = 20$$

$$(40) + 2(0) = 40 \qquad x_1 = 40$$

$$4x_1 + 3x_2 = 120$$

$$4(0) + 3(40) = 120 \qquad x_2 = 40$$

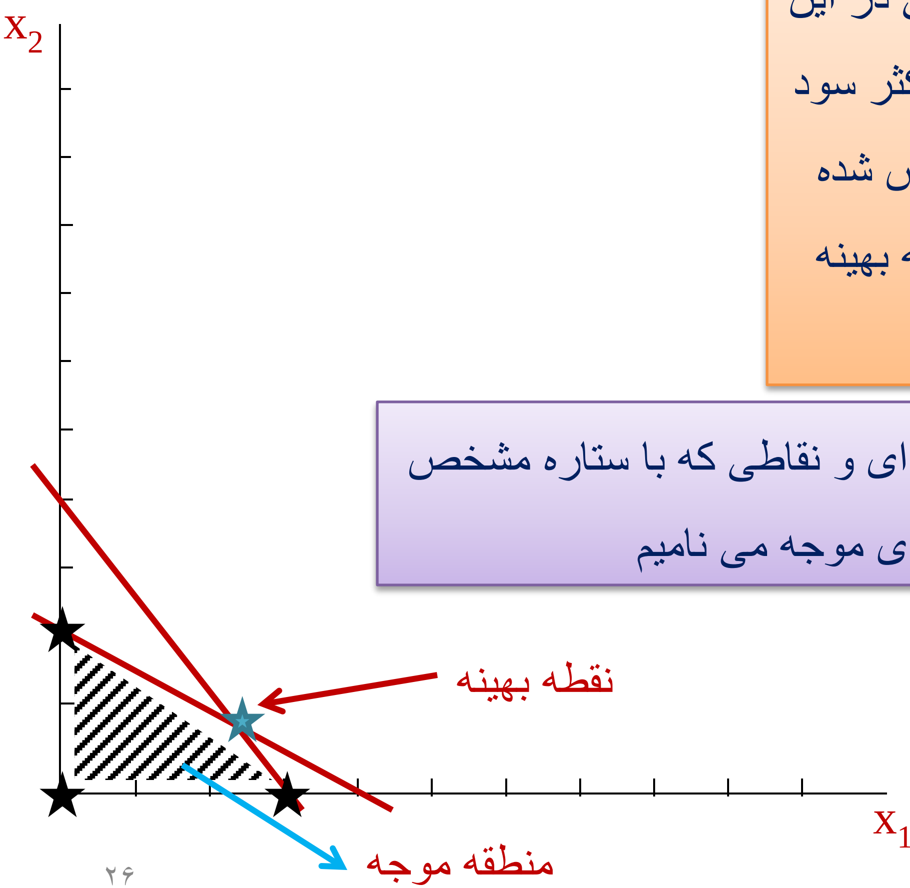
$$4(30) + 3(0) = 120 \qquad x_1 = 30$$

چند نکته:

بر اساس نقاطی که در اسلاید قبل بدست آوردیم و با رنگ آبی مشخص کردیم خطوط را رسم می کنیم

منطقه هاشور خورده منطقه موجه است یعنی در این ناحیه به سود می رسیم ولی ما به دنبال حداکثر سود هستیم پس نقطه ای که با ستاره آبی مشخص شده است نقطه حداکثر سود است که به آن نقطه بهینه می گوییم

محل تلاقی دو خط را نقطه گوشه ای و نقاطی که با ستاره مشخص شده را نقطه گوشه ای موجه می نامیم

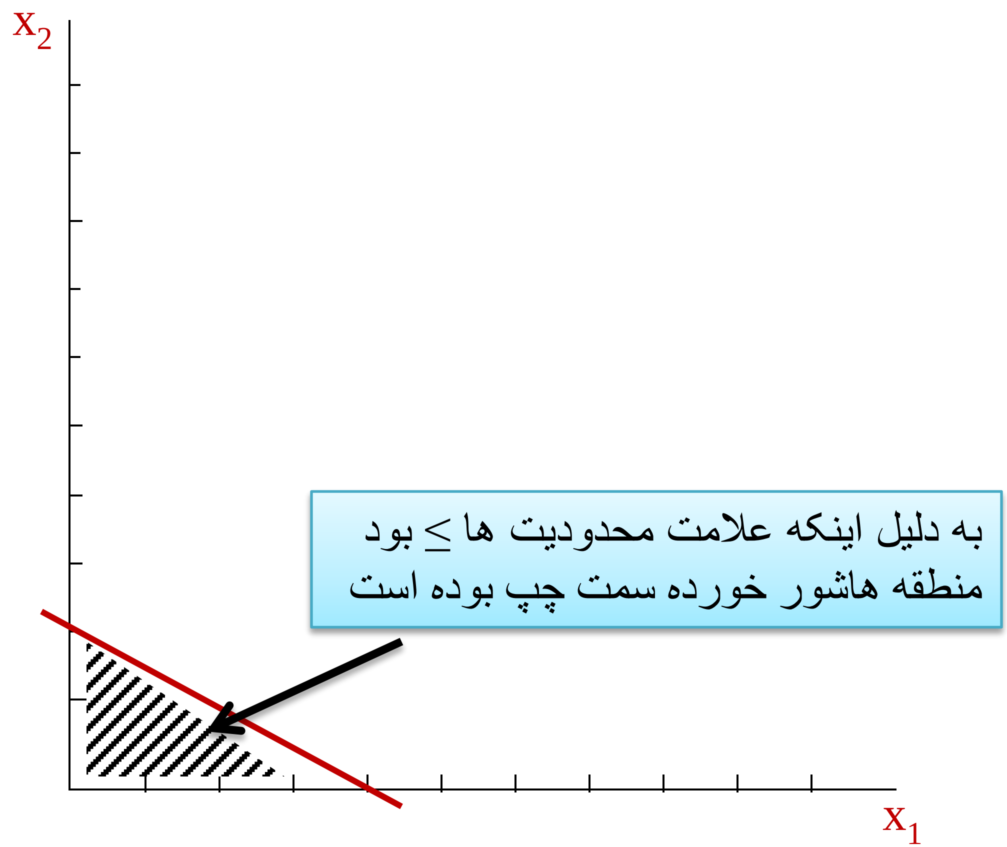


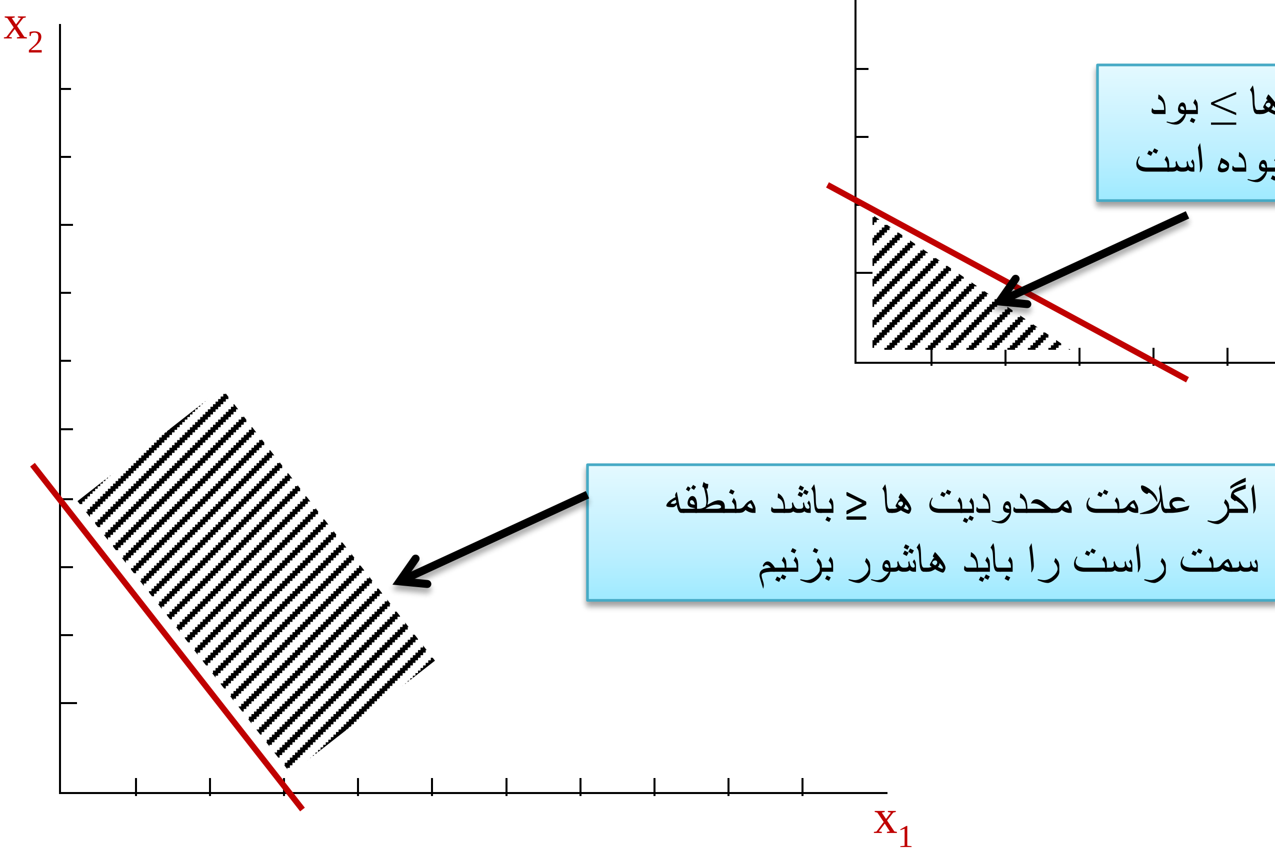
منطقه ی مشترک بین تمام خطوط را منطقه موجه می نامیم

اگر این مسئله را فراموش کردید بهتر است که علامت ها را مانند نوک پیکان در نظر بگیرید. نوک پیکان به هر سمت که باشد آن منطقه را باید هاشور زد.

$\leq$ ←

→ $\geq$





نقطه بهینه

نقطه بهینه

برای بدست آوردن نقطه بهینه باید طبق دستو زیر عمل نمایید

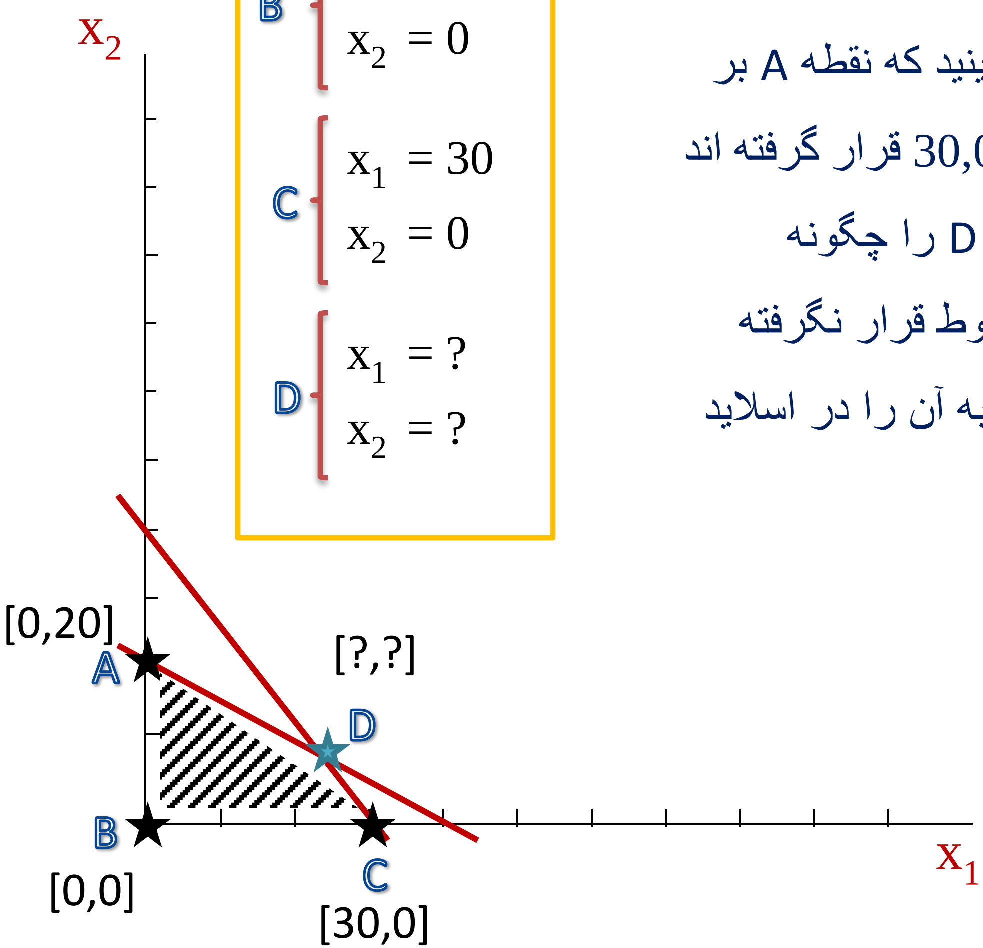
ابتدا چهار نقطه گوشه ای موجه را با حروف A,B,C,D مشخص می کنیم
سپس x_1 و x_2 نقاط A,B,C را می نویسیم برای این کار تنها باید به
دستگاه مقابل نگاه کنید. با یک نگاه ساده می توانید ببینید که نقطه A بر
روی 0,20 نقطه B بر روی 0,0 ونقطه C بر روی 30,0 قرار گرفته اند
حال ممکن است این سوال برایتان پیش بیاید که نقطه D را چگونه
بدست آوریم؟چون این نقطه بر روی هیچ یک از خطوط قرار نگرفته
پس باید این نقطه را با محاسبه بدست آورید که محاسبه آن را در اسلاید
بعد می توانید مشاهده نمایید

A $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 20 \end{cases}$

B $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

C $\begin{cases} x_1 = 30 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

D $\begin{cases} x_1 = ? \\ x_2 = ? \end{cases}$



قبل از محاسبه، تابع هدف و محدودیت ها را در نظر بگیرید

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2$$

s.t

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

حال به اسلاید بعد بروید

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 40 & \text{معادله ۱} \\ 4x_1 + 3x_2 = 120 & \text{معادله ۲} \end{cases}$$

طرفین معاده ۱ را در 4- ضرب می کنیم و همانگونه که در زیر می بینید محاسبه می نماییم

$$-4 \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 40 \\ 4x_1 + 3x_2 = 120 \end{cases} \quad \begin{cases} -4x_1 - 8x_2 = -160 \\ 4x_1 + 3x_2 = 120 \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{-4x_1} - 8x_2 = -160 \\ \cancel{4x_1} + 3x_2 = 120 \end{cases}$$

$$-5x_2 = -40$$

$$x_2 = 8$$

بنابراین با مشخص شدن مقدار x_2 می توانیم به کمک یکی از معادلات اصلی مقدار x_1 را نیز تعیین نماییم

$$x_1 + 2(8) = 40 \longrightarrow 2(8) = 16 \longrightarrow 40 - 16 = 24 \longrightarrow x_1 = 24$$

حال که تمامی نقاط x_1 , x_2 را برای A,B,C,D مشخص نمودیم می توانیم آنها را در تابع هدف قرار دهیم تا نقطه بهینه را بدست آوریم برای این کار به اسلاید بعد مراجعه نمایید

نقاط بدست آمده را در تابع هدف وارد می کنیم.
بزرگ ترین نقطه بدست آمده نقطه بهینه خواهد بود

تابع هدف

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2$$

A $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 20 \end{cases} \Rightarrow 40(0) + 50(20) = 1000$

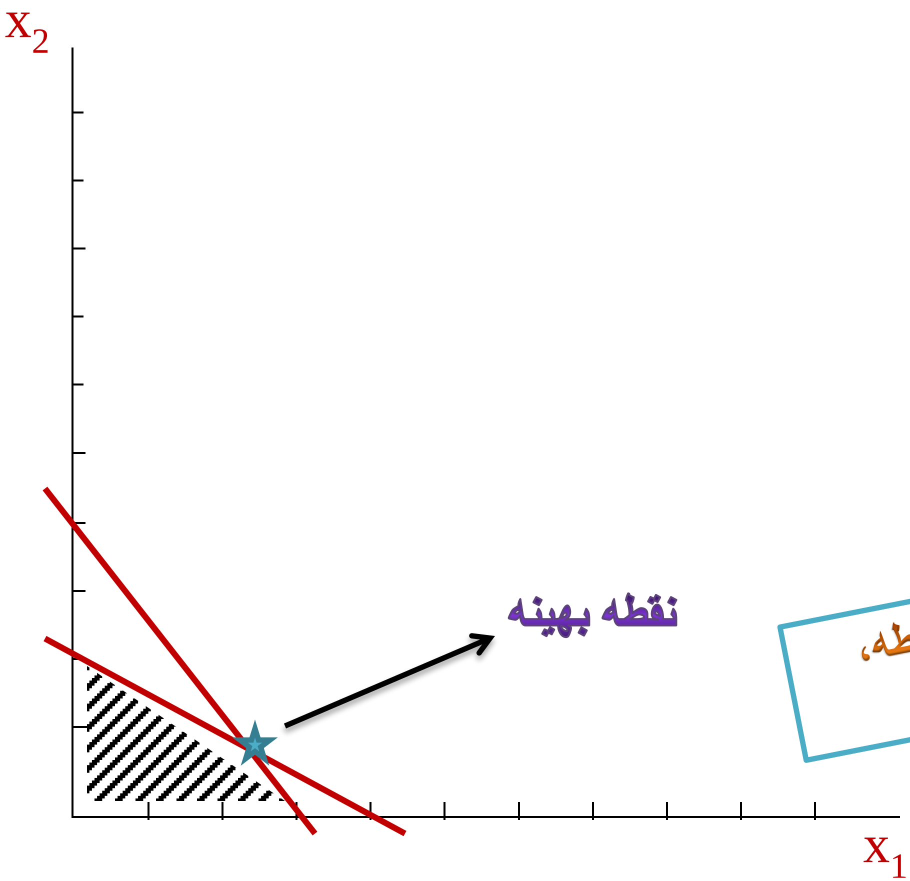
B $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 40(0) + 50(0) = 0$

C $\begin{cases} x_1 = 30 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 40(30) + 50(0) = 1200$

D $\begin{cases} x_1 = 24 \\ x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow 40(24) + 50(8) = \boxed{1360}$

نقطه بهینه

همانطور که مشاهده می نمایید چون بیشترین مقدار متعلق به نقطه D است پس نقطه بهینه ما همین نقطه است



حال مشاهده نمودید که به چه دلیل به این نقطه،
نقطه بهینه می گوییم.

حالتهای خاص نقطه بهینه

۱- جواب بهینه چند گانه

مسائل برنامه ریزی خطی در فرم استاندارد دارای یک گوشه بهینه می باشند که مقدار تابع هدف به ازای آن نقطه حداکثر یا حداقل می گردد. اما هرگاه معادله تابع هدف موازی یکی از محدودیت ها باشد آنگاه مسئله برنامه ریزی خطی دارای جواب بهینه چندگانه خواهد بود. البته موازی بودن تابع هدف با یکی از محدودیت ها تنها شرط کافی برای جواب بهینه چند گانه بودن نیست. در کل هرگاه پس از محاسبه به دو یا چند نقطه بهینه یکسان رسیدیم آن مسئله جواب بهینه چندگانه است.

۲- فاقد ناحیه موجه (جواب)

هرگاه نتوان برای کلیه ی محدودیت های مدل ناحیه مشترکی را پیدا نمود گویند مسئله فاقد ناحیه ی موجه می باشد.

۳- ناحیه جواب بیکران

در برخی از مسائل ناحیه ی موجه مدل طراحی شده، به وسیله ی محدودیت ها محصور نمی شود به عبارت دیگر ناحیه موجه در میان معادلات مرزی بسته نمی شود. در چنین مدل هایی ممکن است تابع هدف به نحو نامحدودی افزایش یا کاهش یابد و هیچگاه به حداکثر یا حداقل نرسد. یعنی جواب بهینه مسئله می تواند محدود و معین و یا نامحدود باشد.

۴- جواب تبهگن

در یک مسئله برنامه ریزی خطی اگر گوشه موجه از محل تلاقی بیش از دو معادله ی مرزی تشکیل شود مسئله تبهگن خواهد بود. یعنی گوشه ای که بیش از دو معادله ی مرزی تشکیل شده باشد را گوشه ی تبهگن گویند.

جواب بهینه چندگانه

جواب بهینه چند گانه : در جواب بهینه چندگانه دو یا چند نقطه مساوی بدست می آید

مثال)

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 30x_2$$

s.t:

$$x_1 + 2x_2 \le 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \le 120$$

$$x_1 , x_2 \ge 0$$

بر اساس تابع هدف و محدودیت های داده شده می خواهیم بدانیم

این مسئله جزء کدام حالت از حالتهای خاص نقطه بهینه است

نقاط X را برای معادله ۱و ۲ بدست می آوریم

$$x_1 + 2x_2 = 40$$

$$(0) + 2(20) = 40$$

$$(40) + 2(0) = 40$$

$$\begin{cases} x_1 = 40 \\ x_2 = 20 \end{cases}$$

$$4x_1 + 3x_2 = 120$$

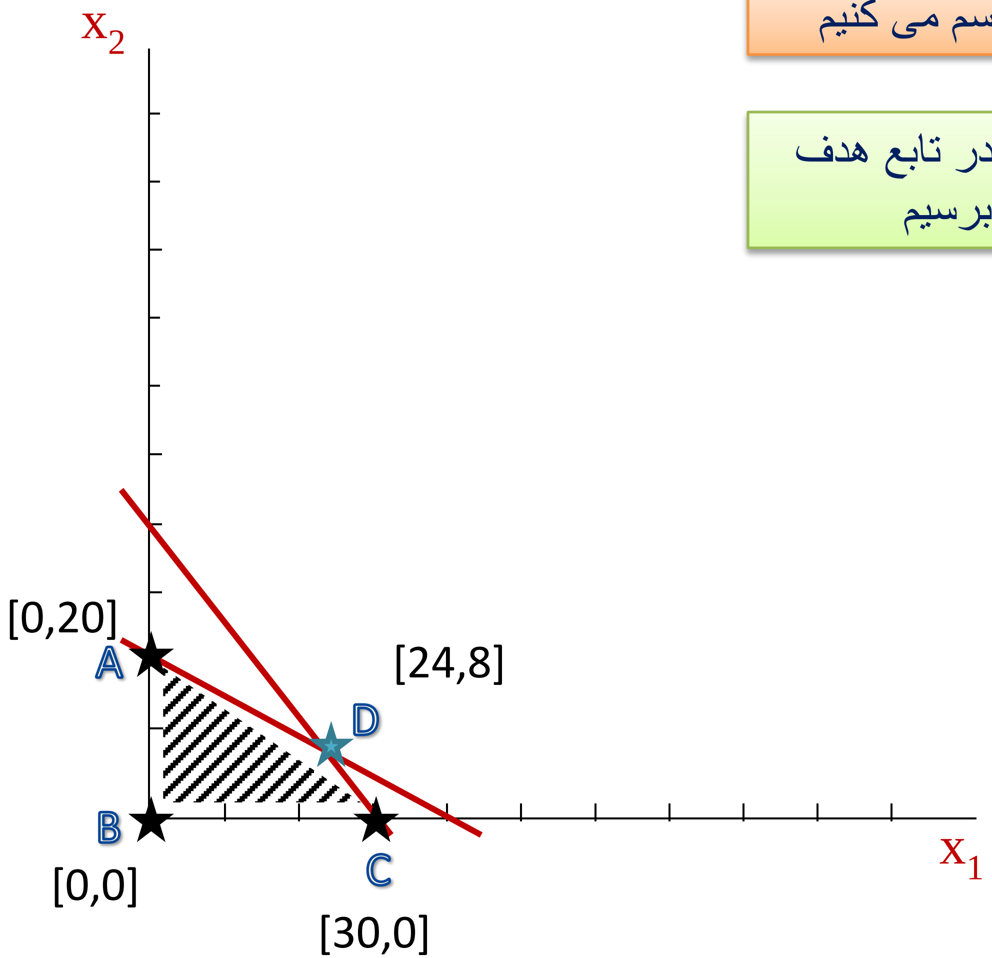
$$4(0) + 3(40) = 120$$

$$4(30) + 3(0) = 120$$

$$\begin{cases} x_1 = 30 \\ x_2 = 40 \end{cases}$$

نقاط بدست آمده در اسلاید قبل را رسم می کنیم

در اسلاید بعد نقاط گوشه ای بهینه را در تابع هدف قرار می دهیم تا به نقطه بهینه برسیم



تابع هدف

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 30x_2$$

A $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 20 \end{cases} \Rightarrow 40(0) + 30(20) = 600$

B $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 40(0) + 30(0) = 0$

C $\begin{cases} x_1 = 30 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 40(30) + 30(0) = \boxed{1200}$

D $\begin{cases} x_1 = 24 \\ x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow 40(24) + 30(8) = \boxed{1200}$

همانطور که مشاهده می نمایید در این مسئله به دو نقطه مساوی دست پیدا کردیم پس دو نقطه بهینه داریم بنابراین جواب بهینه چند گانه است

فاقد ناحیه موجه

فاقد ناحیه موجه : هرگاه نتوانیم منطقه موجه مشترک برای تمام محدودیت ها بیابیم

مثال)

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2$$

s.t:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \geq 6$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

بر اساس تابع هدف و محدودیت های داده شده می خواهیم بدانیم

این مسئله جزء کدام حالت از حالتهای خاص نقطه بهینه است

نقاط X را برای معادله ۱ و ۲ و ۳ بدست می آوریم

$4x_1 + 2x_2 = 8$

$4(0) + 2(4) = 8$

$4(2) + 2(0) = 8$

$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

$x_1 = 4$

$(4) = 4$

$\begin{cases} x_1 = 4 \end{cases}$

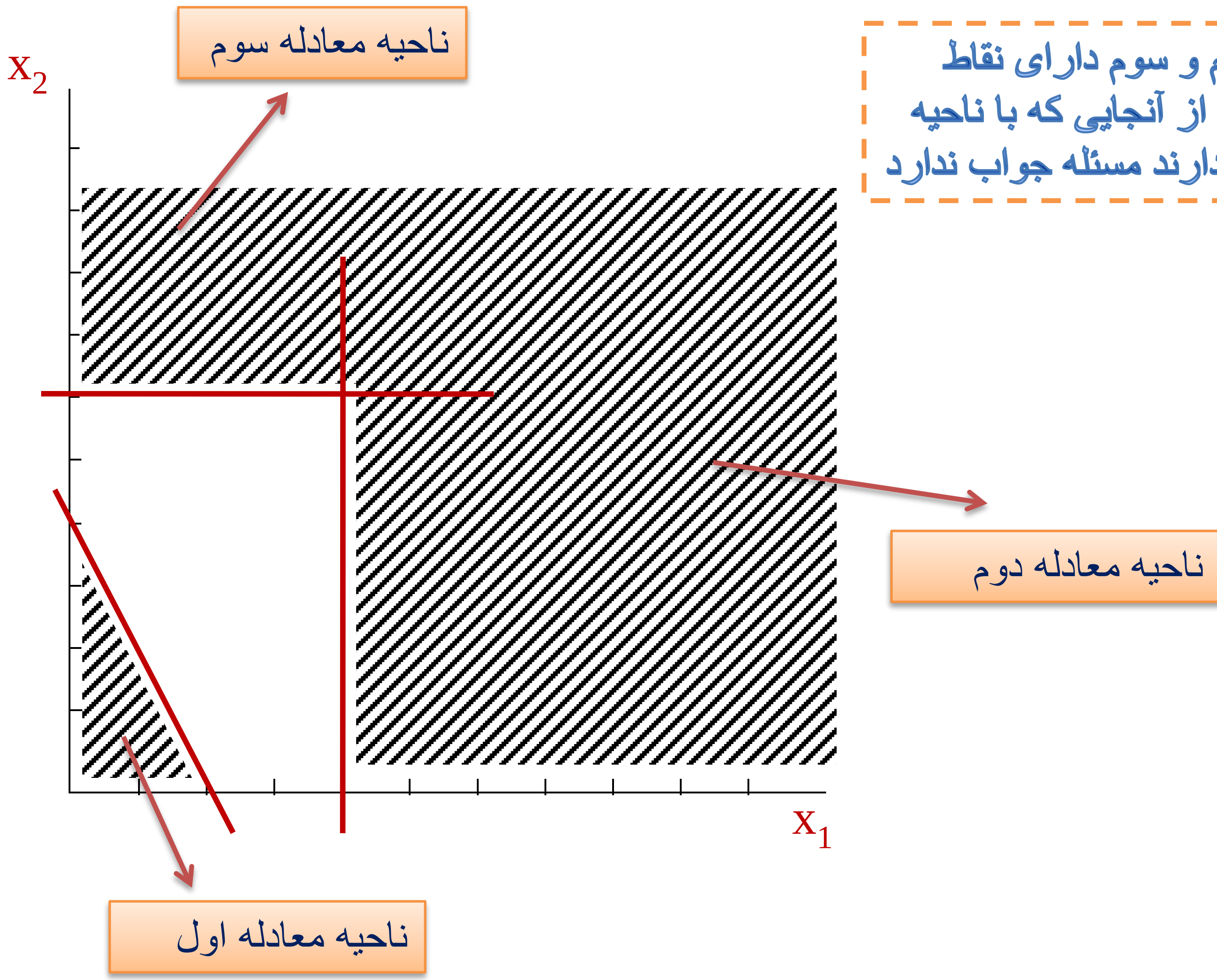
$x_2 = 6$

$(6) = 6$

$\begin{cases} x_2 = 6 \end{cases}$

نقاط بدست آمده در اسلاید قبل را رسم می کنیم

اگرچه ناحیه دوم و سوم دارای نقاط مشترکی هستند اما از آنجایی که با ناحیه اول نقطه مشترکی ندارند مسئله جواب ندارد



ناحیه جواب بیکران

ناحیه جواب بیکران: اگر منطقه موجه توسط محدودیت ها بسته نشود

مثال)

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 2x_2$$

s.t:

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \leq 8$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

بر اساس تابع هدف و محدودیت های داده شده می خواهیم بدانیم

این مسئله جزء کدام حالت از حالتهای خاص نقطه بهینه است

روش سیمپلکس:

ویژگی های یک مسئله با فرم استاندارد:

- تابع هدف فرم استاندارد داشته باشد یعنی max باشد
- همه محدودیت ها کوچکتر مساوی باشند
- همه متغیر ها غیر صفر هستند

سیمپلکس عمدتا کار خود را از مبدا مختصات شروع می کند .

متغیر های برابر ساز : متغیر های غیر منفی هستند که به محدودیتهای کوچکتر مساوی با علامت مثبت اضافه و از محدودیتهای بزرگتر و مساوی کم می شود تا معادلات را به نامعادله تبدیل کند .

S مثبت است هرگاه s داخل منطقه موجه باشد

S منفی است هرگاه s خارج از منطقه موجه باشد

S صفر است هرگاه s روی محدودیت واقع شود

در روش سیمپلکس متغیر اساسی متغیری است با مقدار غیر صفر و متغیر های غیر اساسی متغیر های با مقدار صفر می باشند.

مثال8:

$\max(z) = 12x_1 + 8x_2$

s.t:

$5x_1 + 2x_2 \leq 150$

$2x_1 + 3x_2 \leq 100$

$4x_1 + 2x_2 \leq 80$

$x_1, x_2 \geq 0$

پاسخ8:

$z - 12x_1 - 8x_2 = 0$

$5x_1 + 2x_2 + s_1 = 150$

$2x_1 + 3x_2 + s_2 = 100$

$4x_1 + 2x_2 + s_3 = 80$

x_1وx_2وs_1وs_2و$s_3 \geq 0$

بایستی به ازای تعداد محدودیت ها متغیر های اساسی شروع مسئله داشته باشیم .

تابلوی مقدماتی		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
z		-12	-8	0	0	0	0
متغیر های اساسی شروع مسئله	s_1	5	2	1	0	0	150
	s_2	2	3	0	1	0	100
	s_3	4	2	0	0	1	80

در جداول سیمپلکس متغیر های اساسی بایستی حتما شرط پایه ای بودن را داشته باشند (یکه بودن) ؛ در غیر اینصورت باید شرط یکه بودن را فراهم کنیم .

$x_1 = 0$ {چون روش سیمپلکس کار خود را از مبدا مختصات شروع می کند}

$x_2 = 0$ {چون روش سیمپلکس کار خود را از مبدا مختصات شروع می کند}

$s_1 = 150$

$s_2 = 100$

$s_3 = 80$

شرط پایه ای بودن یعنی اینکه مقدار آن متغیر در محل تلاقی سطر و ستون عدد 1 و در بقیه سطر ها صفر باشد .

شرط بهینگی یعنی هرگاه در سطر Z عدد منفی نداشته باشیم جدول بهینه است .

اگر در سطر Z عدد منفی داشتیم منفی ترین مقدار آن را انتخاب می کنیم ؛ متغیر مربوط به آنرا متغیر ورودی می نامیم و ستونی که متغیر ورودی در آن قرار دارد را انتخاب کرده و ستون لولا می نامیم .

برای انتخاب متغیر خروجی اعداد سمت راست را نظیر به نظیر بر اعداد مثبت ستون لولا تقسیم می کنیم ؛ کوچکترین مقدار را انتخاب کرده و متغیر مربوط به آن را متغیر خروجی می نامیم ؛ سطری که متغیر خروجی در آن قرار دارد را انتخاب و سطر لولا می نامیم ، عدد محل تلاقی سطر و ستون لولا را عدد لولا می نامیم .

تابلو2:

گام اول:شرط پایه‌ای بودن را برای متغیر های اساسی برقرار می کنیم .

گام دوم: سطر جدید لولا را می نویسیم با استفاده از فرمول زیر:

$$\text{سطر جدید لولا} = \frac{\text{سطر قدیم لولا}}{\text{عدد لولا}}$$

گام سوم بقیه اعداد را با استفاده از فرمول زیر می نویسیم:

سطر جدید = سطر قدیم – (ضریب مربوطه در ستون لولا) (سطر جدید لولا)

پاسخ2 با استفاده از روش سیمپلکس:

سطر جدید z=[-12 -8 0 0 0 0]-(-12)[1 1/2 0 0 1/4 20]=[0 -2 0 0 3 240]

سطر جدید s_1=[5 2 1 0 0 150]-(5)[1 1/2 0 0 1/4 20]=[0 -1/2 1 0 -5/4 50]

سطر جدید s_2=[2 3 0 1 0 100]-(2)[1 1/2 0 0 1/4 20]=[0 2 0 1 -1/2 60]

I		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
z		0	-2	0	0	3	**240**
متغیر های اساسی	s_1	0	-1/2	1	0	-5/4	**50**
	s_2	0	2	0	1	-1/2	**30=60÷2**
	x_1	1	1/2	0	0	1/4	**40=20÷0.5**

تابلوی 3:

سطر جدید s_1=[0 -1/2 2 0 -5/4 50]-(-1/2)[0 1 0 1/2 -1/4 30]=[0 0 1 1/4 -11/8 65]

سطر جدید x_1=[1 1/2 0 0 1/4 20]-(1/2)[0 1 0 1/2 -1/4 30]=[1 0 0 -1/4 3/8 5]

سطر جدید z=[0 -2 0 0 3 240]-(-2)[0 1 0 1/2 -1/4 30]=[0 0 0 1 5/2 300]

II		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
z		0	0	0	1	5/2	**300**
متغیر های اساسی	s_1	0	0	1	1/4	-11/8	**65**
	x_2	0	1	0	1/2	-1/4	**30**
	x_1	1	0	0	-1/4	3/8	**5**

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 5 \\
x_2 &= 30 \\
s_1 &= 65 \\
s_2 &= 0 \\
s_3 &= 0 \\
z^* &= 300
\end{aligned}
\qquad \max(z) = 12x_1 + 8x_2 = 300
$$

مثال 9:

$\max(z) = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$

s.t:

$3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30$

$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 40$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

پاسخ 9:

$z - 4x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 0$

$3x_1 + x_2 + 3x_3 + s_1 = 30$

$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_2 = 40$

x_1, x_2, x_3 و $s_1 s_2 \geq 0$

تابلوی مقدماتی		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
z		-4	-3	-6	0	0	**0**
متغیرهای اساسی	s_1	3	1	3	1	0	**30÷3=10**
	s_2	2	2	3	0	1	**40÷3=13.3**

سطر جدید s_2=[2 2 3 0 1 40]-(3)[1 1/3 1 1/3 0 10]=[-1 1 0 -1 1 10]

سطر جدید z=[-4 -3 -6 0 0 0]-(-6)[1 1/3 1 1/3 0 10]=[2 -1 0 2 0 60]

I		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
z		2	-1	0	2	0	**60**
متغیرهای اساسی	x_3	1	1/3	1	1/3	0	**10÷1/3=30**
	s_2	-1	1	0	-1	1	**10÷1=10**

سطر جدید x_3=[1 1/3 1 1/3 0 10]-(1/3)[-1 1 0-1 1 10]=[4/3 0 1 2/3 -1/3 20/3]

سطر جدید z=[2 -1 0 2 0 60]-(-1)[-1 1 0 -1 1 10]=[1 0 0 1 1 70]

II		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
z		1	0	0	1	1	**70**
متغیرهای اساسی	x_3	4/3	0	1	2/3	-1/3	**20/3**
	x_2	-1	1	0	-1	1	**10**

جدول بهینه است

شرط موجه بودن مثبت بودن ردیف b است

$$\begin{array}{c} x_1 = 0 \\ x_2 = 10 \\ x_3 = 20/3 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \\ z^* = 70 \end{array} \quad \max(z) = 70$$

روش M بزرگ

در این روش برای محدودیتهای بزرگتر مساوی و مساوی از متغیر مصنوعی R استفاده می کنیم.

متغیر های مصنوعی متغیر هایی هستند که در روش سیمپلکس با استفاده از آنها محدودیتهای بزرگتر مساوی و محدودیتهای مساوی را به حالت تساوی تبدیل می کنیم ؛ با اضافه کردن متغیر مصنوعی به محدودیت موجب بزرگتر شدن منطقه موجه می گردد به گونه ای که مبدا مختصات نیز جز منطقه موجه آن محدودیت قرار بگیرد.

با بزرگتر شدن منطقه موجه این احتمال به وجود می آید که جواب بهینه بر روی یکی از نقاط گوشه منطقه موجه ناشی از اضافه شدن محدودیت مصنوعی واقع شود که چون در منطقه اصلی موجه مسئله قرار ندارد بنابر این موجه نیست برای جلوگیری از این امر جریمه ای معادل M به متغر مصنوعی R در تابع هدف (MR) در تابع هدف max از سمت راست تابع هدف کم و به سمت راست تساوی تابع هدف MIN اضافه می شود.

مثال10:

$\min(z) = -3x_1 + x_2 + x_3$

s.t:

$x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11$

$-4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3$

$-2x_1 + x_3 = 1$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

پاسخ10:

$$\min(z) = -3x_1 + x_2 + x_3 + MR_2 + MR_3 \rightarrow \max(-z) = 3x_1 - x_2 - x_3 - MR_2 - MR_3$$
$$\rightarrow -z - 3x_1 + x_2 + x_3 + MR_2 + MR_3 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + S_1 = 11$$

$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 - S_2 + R_2 = 3$$

جایی که هم S باشد هم R را به عنوان متغیر اساسی وارد تابلو می کنیم

$$-2x_1 + x_3 + R_3 = 1$$

$$x_1 و x_2 و x_3 و S_1 و S_2 و R_2 و R_3 \geq 0$$

نکته: به محدودیتهای کوچکتر و مساوی فقط S اضافه می شود ؛ به محدودیتهای بزرگتر و مساوی R اضافه و S کم می شودو در محدودیتهای مساوی فقط R اضافه می شود.

تابلوی مقدماتی		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_2	R_3	b
z		-3	1	1	0	0	M	M	0
متغیرهای اساسی شروع مسئله	s_1	1	-2	1	1	0	0	0	11
	$(-M)R_2$	-4	1	2	0	-1	1	0	3
	$(-M)R_3$	-2	0	1	0	0	0	1	1

در روش M بزرگ ابتدا شرط پایه‌ای بودن را برای متغیرهای اساسی برقرار می کنیم (مقادیر M در سطر Z بایستی به 0 تبدیل شوند) به این منظور M– برابر سطرهای متغیر مصنوعی را با سطر Z جمع می کنیم و در سطر z تابلوی بعدی می نویسیم ؛ از اینجا به بعد مانند سیمپلکس ساده عمل می کنیم.

I		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_2	R_3	b
z		$-3+6M$	$1-M$	$1-3M$	0	M	0	0	$-4M$
متغیرهای اساسی	s_1	1	-2	1	1	0	0	0	11÷1=11
	R_2	-4	1	2	0	-1	1	0	3÷2=3/2
	R_3	-2	0	1	0	0	0	1	1÷1=1

این مثال به نتیجه نمی رسد

روش دو مرحله ای

مرحله اول: حداقل کردن تابع هدف متغیر های مصنوعی

مرحله دوم : حل مدل

در روش دو مرحله ای پس از اضافه کردن متغیر های مصنوعی به محدودیتهای بزرگتر و مساوی یا مساوی ؛ یک تابع هدف حداقل $(MIN(W))$ برای مجموع متغیر های مصنوعی تشکیل می دهیم سپس در مرحله اول تابع هدف متغیر های مصنوعی را حل می کنیم تا زمانی که در سطر W عدد منفی نداشته باشیم سپس وارد مرحله دوم می شویم.

نکته: در جداول مقدماتی مرحله اول و دوم ابتدا بایستی شرط پایه ای بودن را برای متغیر های اساسی برقرار کنیم.

مثال11:

$$\max(z) = 5x_1 - 6x_2 - 7x_3$$

s.t:

$$x_1 + 5x_2 - 3x_3 \geq 15$$

$$5x_1 - 6x_2 + 10x_3 \leq 20$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

پاسخ11:

$$z - 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 0$$

$$x_1 + 5x_2 - 3x_3 - S_1 + R_1 = 15$$

$$5x_1 - 6x_2 + 10x_3 + S_2 = 20$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + R_3 = 5$$

x_1وx_2وx_3وS_1وS_2وR_1و$R_3 \geq 0$

$$\min(w) = R_1 + R_3$$

$$MAX(-W) = -R_1 - R_3 \rightarrow -W + R_1 + R_3 = 0$$

	تابلوی مقدماتی مرحله اول	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_3	b
	w	0	0	0	0	0	1	1	**0**
متغیرهای اساسی شروع مسئله	$(-1)R_1$	1	5	-3	-1	0	1	0	**15**
	S_2	5	-6	10	0	1	0	0	**20**
	$(-1)R_3$	1	1	1	0	0	0	1	**5**

در تابلو نهایی مرحله اول ستون متغیر های مصنوعی را حذف می کنیم سپس سطر z را جایگزین سطر W می کنیم ؛ تابلوی مقدماتی مرحله دوم بدست می آید در تابلوی مقدماتی مرحله دوم شرط پایه ای بودن را برای متغیر های اساسی فراهم می کنیم تا به تابلوی شماره 1 مرحله دوم برسیم سپس مسئله را از طریق سیمپلکس عادی حل می کنیم . شرط بهینگی آن است که در سطر z مقدار منفی نداشته باشیم .

تابلوی I مرحله اول		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_3	b
w		-2	-6	2	1	0	0	0	**-20**
متغیرهای اساسی	R_1	1	5	-3	-1	0	1	0	**15**
	S_2	5	-6	10	0	1	0	0	**20**
	R_3	1	1	1	0	0	0	1	**5**

سطر جدید s_2=[5 -6 10 0 1 0 0 20]-(-6)[1/5 1 -3/5 -1/5 0 1/5 0 3]=[19/5 0 32/5 -6/5 1 6/5 0 38]

سطر جدید R_3=[1 1 1 0 0 0 1 5]-(1)[1/5 1 -3/5 -1/5 0 1/5 0 3]=[4/5 0 8/5 1/5 0 1/5 1 2]

سطر جدید w=[-2 -6 2 1 0 0 0 -20]-(-6)[1/5 1 -3/5 -1/5 0 1/5 0 3]=[-4/5 0 -8/5 -1/5 0 6/5 0 -2]

تابلوی II مرحله اول		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_3	b
w		-4/5	0	-8/5	-1/5	0	6/5	0	**-2**
متغیرهای اساسی	x_2	1/5	1	-3/5	-1/5	0	1/5	0	**3**
	S_2	19/5	0	32/5	-6/5	1	6/5	0	**23/4**
	R_3	4/5	0	8/5	1/5	0	1/5	1	**5/4**

جدید s_2=[19/5 0 32/5 -6/5 1 6/5 0 38]-(-32/5)[1/2 0 1 1/8 0 1/8 5/8 5/4]=[3/5 0 0 -2 1 2/5 -4 30]

x_2=[1/5 1 -3/5 -1/5 0 1/5 0 3]-(-3/5)[1/2 0 1 1/8 0 1/8 5/8 5/4]=[1/2 1 0 -1/8 0 11/40 3/8 15/4]

سطر جدید w=[-4/5 0 -8/5 -1/5 0 6/5 0 -2]-(-8/5)[1/2 0 1 1/8 0 1/8 5/8 5/4]=[0 0 0 0 0 7/5 1 0]

تابلوی III مرحله اول		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_3	b
w		0	0	0	0	0	7/5	1	**0**
متغیرهای اساسی	x_2	1/2	1	0	-1/8	0	11/40	3/8	**15/4**
	S_2	3/5	0	0	-2	1	2/5	-4	**30**
	x_3	1/2	0	1	1/8	0	1/8	5/8	**5/4**

در تابلو نهایی مرحله اول ستون متغیر های مصنوعی را حذف می کنیم و سطر Z را جایگزین سطر W می کنیم تابلوی مقدماتی مرحله دوم به دست می آید در تابلو مقدماتی مرحله دوم متغیر های اساسی را یکه می کنیم (شرط پایه ای بودن) ؛ به جدول شماره 1 مرحله دوم می رسیم ؛ از این به بعد مانند سیمپلکس ساده عمل می کنیم . شرط بهینگی آن است که در سطر Z مقدار منفی نداشته باشیم .

تابلوی مقدماتی مرحله دوم		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	b
Z		-5	6	7	0	0	**0**
متغیرهای اساسی شروع مسئله	x_2	1/2	1	0	-1/8	0	**15/4**
	S_2	3/5	0	0	-2	1	**30**
	x_3	1/2	0	1	1/8	0	**5/4**

سطر جدید s_2=[3/5 0 0 -2 1 30]-(3/5)[1 0 2 1/2 0 5/2]=[0 0 -6/5 -23/10 1 33/2]

سطر جدید x_2=[1/2 1 0 -1/8 0 15/4]-(1/2)[1 0 2 1/2 0 5/2]=[0 1 -1 -3/8 0 25/4]

سطر جدید Z=[-5 6 7 0 0 0]-(-5)[1 0 2 1/2 0 5/2]=[0 0 17 5/2 0 25/2]

تابلوی I مرحله دوم		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	b
Z		0	0	17	5/2	0	**25/2**
متغیرهای اساسی	x_2	0	1	-1	-3/8	0	**25/4**
	S_2	0	0	-6/5	-23/10	1	**33/2**
	x_1	1	0	2	1/2	0	**5/2**

مثال 12:

$\max(z) = x_1 + x_2$

s.t

$3x_1 + 2x_2 \leq 20$

$2x_1 + 3x_2 \leq 20$

$x_1 + 2x_2 \geq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

پاسخ12:

$\min(w) = R_3 \rightarrow \max(-w) = -R_3 \rightarrow -w + R_3 = 0$

$z - x_1 - x_2 = 0$

$3x_1 + 2x_2 + S_1 = 20$

$2x_1 + 3x_2 + S_2 = 20$

$x_1 + 2x_2 - S_3 + R_3 = 2$

$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, R_3 \geq 0$

تابلوی مقدماتی مرحله اول		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_3	b
w		0	0	0	0	0	1	**0**
متغیرهای اساسی شروع مسئله	S_1	3	2	1	0	0	0	**20**
	S_2	2	3	0	1	0	0	**20**
	$(-1)R_3$	1	2	0	0	-1	1	**2**

تابلوی I مرحله اول		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_3	b
w		-1	-2	0	0	1	0	**-2**
متغیرهای اساسی	S_1	3	2	1	0	0	0	**20**
	S_2	2	3	0	1	0	0	**20**
	R_3	1	2	0	0	-1	1	**2**

سطر جدید s_2=[2 3 0 1 0 0 20]-(3)[1/2 1 0 0 -1/2 1/2 1]=[1/2 0 0 1 3/2 -3/2 17]

سطر جدید S_1=[3 2 1 0 0 0 20]-(2)[1/2 1 0 0 -1/2 1/2 1]=[2 0 1 0 1 -1 18]

سطر جدید w=[-1 -2 0 0 1 0 -2]-(-2)[1/2 1 0 0-1/2 1/2 1]=[0 0 0 0 0 1 0]

تابلوی II مرحله اول (تابلو نهایی)		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_3	b
w		0	0	0	0	0	1	**0**
متغیرهای اساسی	S_1	2	0	1	0	1	-1	**18**
	S_2	1/2	0	0	1	3/2	-3/2	**17**
	x_2	1/2	1	0	0	-1/2	1/2	**1**

تابلوی مقدماتی مرحله دوم		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b
Z		-1	-1	0	0	0	**0**
متغیرهای اساسی شروع مسئله	S_1	2	0	1	0	1	**18**
	S_2	1/2	0	0	1	3/2	**17**
	x_2	1/2	1	0	0	-1/2	**1**

سطر جدید [-1 -1 0 0 0 0]-(-1)[1 2 0 0 -1 2]=[0 1 0 0 -1 2]=z

سطر جدید [2 0 1 0 1 18]-(2)[1 2 0 0 -1 2]=[0 -4 1 0 3 14]=S_1

سطر جدید [1/2 0 0 1 3/2 17]-(1/2)[1 2 0 0 -1 2]=[0 -1 0 1 5/2 16]=S_2

تابلوی I مرحله دوم		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b
Z		0	1	0	0	-1	**2**
متغیرهای اساسی	S_1	0	-4	1	0	3	**14**
	S_2	0	-1	0	1	5/2	**16**
	x_1	1	2	0	0	-1	**2**

سطر جدید [0 1 0 0 -1 2]-(-1)[0 -4/3 1/3 0 1 14/3]=[0 -1/3 1/3 0 0 20/3]=z

سطر جدید [1 2 0 0 -1 2]-(-1)[0 -4/3 1/3 0 1 14/3]=[1 2/3 1/3 0 0 20/3]=x_1

سطر جدید [0 -1 0 1 5/2 16]-(5/2)[0 -4/3 1/3 0 1 14/3]=[0 7/3 -5/6 1 0 13/3]=S_2

تابلوی II مرحله دوم		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b
Z		0	-1/3	1/3	0	0	**20/3**
متغیرهای اساسی	S_3	0	-4/3	1/3	0	1	**14/3**
	S_2	0	7/3	-5/6	1	0	**13/3**
	x_1	1	2/3	1/3	0	0	**20/3**

سطر جدید [0 -1/3 1/3 0 0 20/3]-(-1/3)[0 1 -5/42 3/7 0 13/7]=[0 0 37/126 1/7 0 260/21]=z

سطر جدید [1 2/3 1/3 0 0 20/3]-(2/3)[0 1 -5/42 3/7 0 13/7]=[0 0 11/63 4/7 1 50/7]=x_1

سطر جدید [0 -4/3 1/3 0 1 14/3]-(-4/3)[0 1 -5/42 3/7 0 13/7]=[0 0 16/63 -2/7 0 114/21]=S_3

تابلوی III مرحله دوم (تابلو نهایی)		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b
Z		0	0	37/126	1/7	0	**260/21**
متغیرهای اساسی	S_3	0	0	11/63	4/7	1	**50/7**
	x_2	0	1	-5/42	3/7	0	**12/7**
	x_1	1	0	16/63	-2/7	0	**114/21**

بهینه چند گانه:

در روش سیمپلکس هرگاه مقدار یک متغیر اساسی در سطر Z جدول بهینه برابر صفر باشد آن مسئله دارای حالت خاص بهینه چند گانه می باشد.

نمونه:

$\max(z) = 10x_1 + 20x_2$

s.t:

$2x_1 + 4x_2 \leq 12$

$2x_1 + 2x_2 \leq 8$

$x_1, x_2 \geq 0$

(تابلو نهایی)		x_1	x_2	S_1	S_2	b
Z		0	0	5	0	60
متغیرهای اساسی	S_2	1/2	1	-1/4	0	3
	x_2	1	0	-1/2	1	2

تبهگن:

هرگاه مقدار یک متغیر اساسی در جداول سیمپلکس برابر صفر باشد (وجود عدد صفر در ستون سمت راست برای یک یا چند سطر به جز سطر تابع هدف) مسئله دارای حالت خاص تبهگن می باشد. اگر این حالت در جدولی غیر از جدول نهایی اتفاق بیفتد تبهگن موقت و اگر در جدول نهایی باشد تبهگن دائم است.

نمونه:

$\max(z) = 3x_1 + 9x_2$

s.t:

$x_1 + 4x_2 \leq 8$

$x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x_1 , x_2 \geq 0$

		x_1	x_2	S_1	S_2	b
Z		-3	-9	0	0	0
متغیرهای اساسی مسئله	S_1	1	4	1	0	8
	S_2	1	2	0	1	4
Z		-3/4	0	9/4	0	18
متغیرهای اساسی	x_2	1/4	1	1/4	0	2
	S_2	1/2	0	-1/2	1	0
Z^*		0	0	3/2	3/2	18
متغیرهای اساسی	x_2	0	1	1/2	-1/2	2
	x_1	1	0	-1	2	0

فاقد منطقه موجه:

هرگاه مقدار یک متغیر مصنوعی در جدول بهینه غیر صفر باشد (وجود متغیر اساسی مصنوعی در جدول نهایی) مسئله فاقد منطقه موجه می باشد.

نمونه:

$\max(z) = 4x_1 + 3x_2$

s.t:

$x_1 + x_2 \leq 3$

$2x_1 - x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 4$

$x_1 , x_2 \geq 0$

(تابلو نهایی)		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_3	b
z^*		0	0	$\frac{m+10}{3}$	$\frac{m+1}{3}$	0	0	-2m-11
متغیرهای اساسی	x_2	0	1	2/3	-1/3	0	0	1
	x_1	1	0	1/3	1/3	0	0	2
	R_3	0	0	-1/3	-1/3	-1	1	2

منطقه موجه نامحدود-جواب بهینه نا محدود وجواب بهینه محدود:

وجود ستون منفی یا صفر برای یک متغیر اساسی در تابلوی مقدماتی به مفهوم اینست که منطقه موجه مسئله نامحدود می باشد؛ هرگاه در جداول سیمپلکس متغیر ورودی وجود داشته باشد اما به دلیل منفی یا صفر بودن تمامی عناصر ستون لولا انتخاب متغیر خروجی امکان پذیر نباشد مسئله دارای حالت خاص منطقه موجه نامحدود-جواب بهینه نامحدود می باشد و هرگاه در مسئله منطقه موجه نامحدود به جواب بهینه برسیم مسئله دارای جواب بهینه محدود می باشد.

نمونه:

$$\max(z) = 6x_1 + 2x_2$$

s.t:

$$2x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_1 \leq 4$$

x_1و$x_2 \geq 0$

		x_1	x_2	S_1	S_2	b
Z		-6	-2	0	0	0
متغیر های اساسی مسئله	S_1	2	-1	1	0	2
	S_2	1	0	0	1	4
Z		0	-5	3	0	6
متغیر های اساسی	x_1	1	-1/2	1/2	0	1
	S_2	0	1/2	-1/2	1	2
Z		0	0	-2	10	36
متغیر های اساسی	x_1	1	0	0	1	4
	x_2	0	1	-1	2	6

$$\max(z) = 6x_1 - 2x_2$$

s.t:

$$2x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_1 \leq 4$$

x_1و$x_2 \geq 0$

		x_1	x_2	S_1	S_2	b
Z		-2	2	0	0	0
متغیر های اساسی مسئله	S_1	2	-1	1	0	1
	S_2	1	0	0	1	4
Z		0	-1	3	0	6
متغیر های اساسی	x_2	1	-1/2	1/2	0	1
	S_2	0	1/2	-1/2	1	2
Z^*		0	0	2	2	12
متغیر های اساسی	x_2	1	0	0	1	4
	x_1	0	1	-1	2	6

تفسیر اقتصادی جداول سیمپلکس

		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	b
Z		-5	-2	-3	0	0	0
متغیرهای اساسی شروع مسئله	S_1	1	2	2	1	0	8
	S_2	3	4	1	0	1	7
Z		0	14/3	-4/3	0	5/3	35/3
متغیرهای اساسی	S_1	0	2/3	5/3	1	-1/3	17/3
	x_1	1	4/3	1/3	0	1/3	7/3
Z		0	26/5	0	4/5	7/5	81/5
متغیرهای اساسی	x_3	0	2/5	1	3/5	-1/5	17/5
		1	6/5	0	-1/5	2/5	6/5

در جدول اول برای تولید یک واحد x_2:

- $\frac{2}{3}$ از s_1 مصرف شود
- $\frac{4}{3}$ کاهش تولید x_1

$$\begin{cases} \frac{4}{3} \times 1 = \frac{4}{3} s_1 \text{ آزاد} \\ \frac{4}{3} \times 3 = 4 s_2 \end{cases}$$

$$\frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2 s_1$$

سود ناشی از تولید x_2: $1 \times 2 = 2$

زیان ناشی از تولید x_1 به میزان $\frac{4}{3}$: $\frac{4}{3} \times 5 = \frac{20}{3}$

زیان ناشی از تولید یک واحد x_2=زیان-سود $2 - \frac{20}{3} = -\frac{14}{3}$

در جدول اول برای تولید یک واحد x_3:

- $\frac{5}{3}$ از s_1 مصرف شود
- $\frac{1}{3}$ کاهش تولید x_1

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3} s_1 \text{آزاد} \\ \frac{1}{3} \times 3 = 1 s_2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{3} = 2 s_1$$

سود ناشی از تولید x_3: $1 \times 3 = 3$

زیان ناشی از تولید x_1 به میزان $\frac{1}{3}$: $\frac{1}{3} \times 5 = \frac{5}{3}$

سود ناشی از تولید یک واحد x_2=زیان-سود $3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$

قیمت های سایه‌ای : به ازای هر محدودیت یک قیمت سایه‌ای وجود دارد؛ قیمت های سایه‌ای هر محدودیت نشان دهنده میزان بهبود مقدار تابع هدف به ازای افزایش سمت راست آن محدودیت به ازای یک واحد به شرطی که سایر پارامتر های مدل بدون تغییر باقی بماند. قیمت های سایه‌ای برابر است با ضریب متغیر های کمکی در سطر z جدول نهایی ؛ به ضریب متغیر های کمکی در سطر z جدول سیمپلکس به غیر از جدول نهایی سهم مشارکت در سود گفته می شود.

مساله ثانویه

برای نوشتن مساله ثانویه باید مراحل ذیل طی گردد:

1 -در صورتی که تابع هدف مساله اولیه max باشد همگی محدودیت ها را به صورت کوچکتر و مساوی و اگر تابع هدف min باشد همگی محدودیت ها را به صورت بزرگتر و مساوی بنویسید.

2 -اگر محدودیتهای مسئله اولیه کوچکتر و مساوی باشد محدودیتهای مساله ثانویه بزرگتر و مساوی خواهد بود و بالعکس.

3 -اگر تابع هدف مساله اولیه max باشد تابع هدف مساله ثانویه min خواهد بود و بالعکس.

4 -به ازای تعداد محدودیتها در مسئله اولیه متغیر تصمیم در مسئله ثانویه وجود دارد و به ازای تعداد متغیر های تصمیم مسئله اولیه ؛ محدودیت در مسئله ثانویه وجود دارد.

5 -ضرائب تابع هدف مسئله اولیه اعداد سمت راست محدودیت های مسئله ثانویه می باشد و اعداد سمت راست محدودیت های مسئله اولیه ؛ ضرائب تابع هدف در مسئله ثانویه خواهد بود.

6 -تمامی متغیر های مسئله اولیه و ثانویه غیر منفی خواهند بود.

مثال13)

$\min(z) = 4x_1 + x_2$

s.t:

$3x_1 + x_2 \leq 4$

$4x_1 + 3x_2 \geq 6$

$x_1 + 2x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

پاسخ13)

مدل اولیه:

$\min(z) = 4x_1 + x_2$

s.t:

$\rightarrow y_1: -3x_1 - x_2 \geq -4$

$y_2: 4x_1 + 3x_2 \geq 6$

$\rightarrow y_3: -x_1 - 2x_2 \geq -3$

$x_1, x_2 \geq 0$

مدل ثانویه:

$\max(y) = -4y_1 + 6y_2 - 3y_3$

s.t:

$1: -3y_1 + 4y_2 - y_3 \leq 4$

$2: -y_1 + 3y_2 - 2y_3 \leq 1$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

هرگاه در مساله اولیه یک محدودیت به صورت تساوی برقرار باشد متغیر مربوط به آن محدودیت در مسئله ثانویه به صورت آزاد در علامت خواهد بود.

مثال14)

$\max(z) = x_1 + 2x_2$

s.t:

$2x_1 + x_2 = 5$

$3x_1 - x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

پاسخ14)

$\min(y) = 5y_1 + 6y_2$

s.t:

$2y_1 + 3y_2 \geq 1$

$y_1 - y_2 \geq 2$

y_1: آزاد در علامت

$y_2 \geq 0$

هرگاه مساله اولیه دارای یک متغیر آزاد در علامت باشد محدودیت مربوط به آن متغیر در مسئله ثانویه به شکل تساوی برقرار خواهد شد.

مثال15)

$\max(z) = 3x_1 + x_2$

s.t:

$2x_1 + x_2 \leq 4$

$3x_1 - x_2 \leq 6$

x_1: آزاد در علامت

$x_2 \geq 0$

پاسخ15)

$\min(y) = 4y_1 + 6y_2$

s.t:

$2y_1 + 3y_2 = 3$

$y_1 - y_2 \geq 1$

$y_1, y_2 \geq 0$

روابط بین مسأله اولیه و ثانویه:

ثانویه ی مسأله ثانویه مسأله اولیه می باشد.

مثال 16)

$max(z) = 7x_1 + 10x_2$

s.t:

$3x_1 + 2x_2 \leq 36$

$2x_1 + 4x_2 \leq 40$

$x_2 , x_1 \geq 0$

پاسخ16)

		x_1	x_2	S_1	S_2	b
Z		-7	-10	0	0	**0**
متغیر های اساسی شروع مسئله	S_1	3	2	1	0	**36**
	S_2	2	4	0	1	**40**
Z		-2	0	0	5/2	**100**
متغیر های اساسی	S_1	2	0	1	-1/2	**16**
	x_2	1/2	1	0	1/4	**10**
Z^*		0	0	1	2	**116**
متغیر های اساسی	x_1	1	0	1/2	-1/4	**8**
		0	1	-1/4	3/8	**6**

$\min(y) = 36y_1 + 40y_2$	$\max(-y) = -36y_1 - 40y_2 - MR_1 - MR_2$ $\rightarrow -y + 36y_1 + 40y_2 + MR_1 + MR_2 = 0$
$3y_1 + 2y_2 \geq 7$	$\rightarrow 3y_1 + 2y_2 - L_1 + R_1 = 7$
$2y_1 + 4y_2 \geq 1$	$\rightarrow 2y_1 + 4y_2 - L_2 + R_2 = 10$
$y_1, y_2 \geq 0$	$y_1, y_2, L_1, L_2, R_1, R_2 \geq 0$

		y_1	y_2	L_1	L_2	R_1	R_2	b
Y		36	40	0	0	M	M	**0**
متغیرهای اساسی شروع مسئله	R_1	3	2	-1	0	1	0	**7**
	R_2	2	4	0	-1	0	1	**10**
Y		36-5M	40-6M	M	M	0	0	**-17M**
متغیرهای اساسی	R_1	3	2	-1	0	1	0	**7**
	R_2	2	4	0	-1	0	1	**10**
Y		16-2M	0	M	10-1/2M	0	-100+3/2M	**-100-2M**
متغیرهای اساسی	R_1	2	0	-1	1/2	1	-1/2	**2**
		1/2	1	0	-1/4	0	1/4	**5/2**
Y^*		0	0	8	6	M-8	-6+M	**-116**
متغیرهای اساسی	y_1	1	0	-1/2	1/4	1/2	-1/4	**1**
	y_2	0	1	1/4	-3/8	-1/4	3/8	**2**

رابطه کمکی مکمل :

$$z < z^* = y^* < y$$

1) اگر مسأله اولیه دارای جواب بهینه محدود باشد مسأله ثانویه نیز دارای جواب بهینه محدود است .

2) اگر مسأله اولیه دارای جواب بهینه نامحدود باشد مسأله اولیه بدون جواب بهینه است .

3) اگر مسأله اولیه بدون جواب بهینه باشد مسأله ثانویه ؛ یا بدون جواب بهینه است یا دارای جواب بهینه نامحدود می باشد .

$$\begin{cases} y_1 . s_1 = 0 \\ y_2 . s_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 . L_1 = 0 \\ x_2 . L_2 = 0 \end{cases}$$

برای بدست آوردن جواب بهینه یک مساله از جدول بهینه مساله دیگر باید مراحل زیر صورت گیرد:

1) یکی از 2 مساله (اولیه یا ثانویه) برای حل انتخاب کرده و جواب بهینه را محاسبه کنید .

2) جواب بهینه مساله دیگر در سطر صفر جدول بهینه این مساله (جدول بهینه ای که در بند 1 محاسبه کرده اید) قرار دارد.

3) مقدار متغیر های تصمیم مساله دیگر در زیر ستون متغیر های اساسی شروع مساله در جدول ابتدایی این مساله قرار دارد.

4) در صورتی که مساله اولیه به صورت فرم استاندارد باشد مقدار متغیر های تصمیم مسئله ثانویه همان مقادیری است که در بند 3 محاسبه کرده اید.

5) در صورتی که مساله اولیه به صورت غیر استاندارد بوده و به روش M بزرگ حل شده باشد M ها را از مقادیر بدست آورده در بند 3 حذف کنید و به بند 6 توجه کنید.

6) اگر تابع هدف اصلی مساله به صورت MAX باشد مقادیر بدست آمده در بند 5 مقدار بهینه متغیر های تصمیم مساله ثانویه می باشد و اگر تابع هدف اصلی مساله MIN باشد مقادیر بدست آمده در بند 5 را در 1- ضرب کنید.

روش سیمپلکس ثانویه:

نمونه:

$\min(z) = 12x_1 + 5x_2$	$\max(-z) = -12y_1 - 5y_2$ $\rightarrow -z + 12x_1 + 5x_2 = 0$
$4x_1 + 2x_2 \geq 80$	$\rightarrow -4x_1 - 2x_2 + s_1 \leq -80$
$2x_1 + 3x_2 \geq 90$	$\rightarrow 2x_1 - 3x_2 + s_2 \leq -90$
$x_1, x_2 \geq 0$	$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

تابلوی مقدماتی		x_1	x_2	s_1	s_2	b
z		12	5	0	0	0
متغیر های اساسی شروع مسئله	s_1	-4	-2	1	0	-80
	s_2	-2	-3	0	1	-90

متغیر ورودی (ستون لولا)

متغیر خروجی (سطر لولا)

عدد لولا

		x_1	x_2	s_1	s_2	b
z		26/3	0	0	5/3	-150
متغیرهای اساسی شروع مسئله	s_1	-8/3	0	1	-2/3	-20
	x_2	2/3	1	0	-1/3	30
		x_1	x_2	s_1	s_2	b
z^*		2	0	5/2	0	-200
متغیرهای اساسی شروع مسئله	s_2	4	0	-3/2	1	30
	x_2	2	1	-1/2	0	40

در روش سیمپلکس ثانویه از فضای بهینگی به سمت فضای موجه مراحل صورت می گیرد .

در روش سیمپلکس ثانویه مراحل ذیل باید طی گردد:

1) مساله را به صورت فرم استاندارد بنویسید.

2) جدول ابتدایی سیمپلکس را تشکیل بدهید.

3) منفی ترین عدد در سمت راست را انتخاب کنید ؛ سطر مربوط به این متغیر را سطر لولا بنامید و متغیر اساسی مربوط به این سطر را متغیر خروجی بنامید آنگاه بند 4 بروید ؛ در صورتی که تمام اعداد سمت راست دارای یک مقدار غیر منفی باشند جواب فعلی موجه و بهینه می باشد .

4) متغیر ورودی را با تقسیم اعداد سطر z بر اعداد منفی سطر لولا و انتخاب بزرگترین عدد (کوچکترین عدد از نظر قدر مطلق) انتخاب کنید، ستون زیر متغیر ورودی را ستون لولا بنامید . محل تلاقی سطر و ستون لولا را عدد لولا بنامید . اگر تمامی عناصر سطر لولا غیر منفی باشد مساله فاقد منطقه موجه است.

5) عملیات به هنگام کردن و کسب جواب جدید را انجام دهید. (این مرحله عینا شبیه روش سیمپلکس معمولی می باشد) دقت کنید عدد لولا بایستی منفی باشد.

اگر در سطر لولا عدد منفی نداشته باشیم مسئله فاقد منطقه موجه است.